

# Registrace obrazu se zaměřením na biomedicínské aplikace

## Image registration for medical applications

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 6. května 2011

.....

Ráda bych na tomto místě poděkovala všem, kteří mi pomohli s touto prací, především pak svému vedoucímu, Prof. RNDr. Zdeňku Dostálovi, DSc. za jeho vedení při tvorbě práce, trpělivost a čas při konzultacích.

## Abstrakt

Tato diplomová práce je motivována problematikou zpracování snímků pacientů onkologické kliniky Fakultní nemocnice v Ostravě-Porubě (FNO). Základem práce je přehled metod registrace obrazu využívaných v lékařství, zahrnující parametrické metody - registrace pomocí význačných bodů, registrace pomocí hlavních os a optimální lineární registrace, a neparametrickou metodu elastické registrace. V tomto případě předpokládáme, že transformace budou malé. Hlavním přínosem práce je porovnání uvažovaných technik na základě vlastní implementace a na zkušebních obrazech, ale i na snímcích poskytnutých FNO.

**Klíčová slova:** Registrace obrazu, význačné body, hlavní osy, optimální lineární registrace, elastická registrace.

## Abstract

This thesis is motivated by issues of image processing of patients from oncology of Fakultní nemocnice v Ostravě-Porubě (FNO). The work is based on survey of techniques of image registration used in medicine, including parametric techniques - landmark-based registration, principal axes-based registration and optimal linear registration, and nonparametric method of elastic registration. In this case it is assumed that the transformation will be small. The main contribution of this work is comparison of mentioned techniques based on own implementation and test images, but also on the images provided by FNO.

**Keywords:** Image registration, landmarks, principal axes, optimal linear registration, elastic registration.

## Seznam použitých symbolů, zkratk a značení

$\ \cdot\ _{\mathbb{R}^2}$	– norma na prostoru $\mathbb{R}^2$ , $\ x\ _{\mathbb{R}^2} = \sqrt{x^\top x}$
$\dagger$	– pseudoinverze matice
$\top$	– transpozice matice
$\nabla$	– $\nabla f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f)^\top$ pro funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , – $\nabla \varphi = (\partial_{x_k} \varphi_j)_{j,k}$ pro $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,
$*$	– konvoluce
$\times$	– Kartézský součin
$\mathbb{C}$	– množina komplexních čísel
$\Delta$	– Laplaceův operátor, $\Delta f = \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j^2} f$
$\delta_x$	– Kroneckerovo delta
$\det$	– determinant
$\operatorname{div}$	– divergence, $\operatorname{div} v = \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} v_j$
$D^\kappa$	– $D^\kappa f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\kappa_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\kappa_2} f$
$I_2$	– jednotková matice $\in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
$L_2(\Omega)$	– $L_2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_\Omega  f(x) ^2 \, dx < \infty \right\}$
$\mathbb{N}$	– množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	– množina reálných čísel

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Matematický základ</b>	<b>5</b>
2.1	Definice obrazu . . . . .	5
2.2	Diskretizace spojitého obrazu . . . . .	5
2.3	Interpolace diskrétního obrazu . . . . .	6
2.4	Problém registrace . . . . .	7
2.5	Lagrangeovy a Eulerovy souřadnice . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Parametrické metody</b>	<b>9</b>
3.1	Metoda význačných bodů . . . . .	9
3.2	Hladká metoda význačných bodů . . . . .	10
3.3	Metoda hlavních os . . . . .	11
3.4	Optimální lineární registrace . . . . .	12
3.5	Ukázka parametrické registrace . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Elastická registrace</b>	<b>36</b>
4.1	Fyzikální motivace . . . . .	37
4.2	Vlastní funkce Navier-Lamého operátoru . . . . .	41
4.3	Variační formulace problému pružnosti . . . . .	42
4.4	Postup řešení . . . . .	43
4.5	Aproximace Navier-Lamého rovnic pomocí konečných diferencí . . . . .	43
4.6	Diagonalizace strukturované matice . . . . .	45
4.7	Výpočet sil . . . . .	48
4.8	Výsledný algoritmus . . . . .	48
4.9	Ukázka elastické registrace . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Implementace</b>	<b>55</b>
<b>6</b>	<b>Experimentální zpracování snímku z FNO</b>	<b>57</b>
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>70</b>
<b>8</b>	<b>Literatura</b>	<b>71</b>

## Seznam obrázků

2.1	Nejednoznačnost výsledků. . . . .	7
2.2	Rozdíl Lagrangeových a Eulerových souřadnic. . . . .	8
3.1	Význačné body - posun. . . . .	15
3.2	Význačné body - rotace. . . . .	16
3.3	Význačné body - „rybí oko“. . . . .	17
3.4	Význačné body - kombinace. . . . .	18
3.5	Hladké význačné body - posun, $\alpha = 0$ . . . . .	19
3.6	Hladké význačné body - posun, $\alpha = 10^4$ . . . . .	20
3.7	Hladké význačné body - rotace, $\alpha = 0$ . . . . .	21
3.8	Hladké význačné body - rotace, $\alpha = 10^4$ . . . . .	22
3.9	Hladké význačné body - „rybí oko“, $\alpha = 0$ . . . . .	23
3.10	Hladké význačné body - „rybí oko“, $\alpha = 10^4$ . . . . .	24
3.11	Hladké význačné body - kombinace, $\alpha = 0$ . . . . .	25
3.12	Hladké význačné body - kombinace, $\alpha = 10^4$ . . . . .	26
3.13	Hlavní osy - posun, původní intenzita šedi. . . . .	27
3.14	Hlavní osy - posun. . . . .	28
3.15	Hlavní osy - rotace. . . . .	29
3.16	Hlavní osy - „rybí oko“. . . . .	30
3.17	Hlavní osy - kombinace. . . . .	31
3.18	Optimální lineární registrace - posun. . . . .	32
3.19	Optimální lineární registrace - rotace. . . . .	33
3.20	Optimální lineární registrace - „rybí oko“. . . . .	34
3.21	Optimální lineární registrace - kombinace. . . . .	35
4.1	Elastické registrace - posun. . . . .	50
4.2	Elastické registrace - rotace. . . . .	51
4.3	Elastické registrace - „rybí oko“. . . . .	52
4.4	Elastické registrace - „rybí oko“, odlišný kontrast. . . . .	53
4.5	Elastické registrace - kombinace. . . . .	54
6.1	Význačné body - první řez hrudníku. . . . .	58
6.2	Význačné body - druhý řez hrudníku. . . . .	59
6.3	Hladké význačné body - první řez hrudníku, $\alpha = 0$ . . . . .	60
6.4	Hladké význačné body - první řez hrudníku, $\alpha = 10^4$ . . . . .	61
6.5	Hladké význačné body - druhý řez hrudníku, $\alpha = 0$ . . . . .	62
6.6	Hladké význačné body - druhý řez hrudníku, $\alpha = 10^4$ . . . . .	63
6.7	Hlavní osy - první řez hrudníku. . . . .	64
6.8	Hlavní osy - druhý řez hrudníku. . . . .	65
6.9	Optimální lineární registrace - první řez hrudníku. . . . .	66
6.10	Optimální lineární registrace - druhý řez hrudníku. . . . .	67
6.11	Elastická registrace - první řez hrudníku. . . . .	68
6.12	Elastická registrace - druhý řez hrudníku. . . . .	69

# 1 Úvod

Registrace obrazu je proces nalezení vhodné transformace jednoho obrazu, tak aby se v určitém smyslu podobal jinému obrazu. Tyto obrazy většinou zobrazují stejnou scénu, ale jsou pořízeny z různých pohledů, v různém čase nebo různými senzory. Je zásadním krokem při zpracovávání obrazů, pokud je třeba porovnat nebo integrovat informace z více obrazů, například při fúzi nebo detekci změn. Registrace obrazu se využívá v nejrůznějších oblastech, jmenujme například předpověď počasí, geografické informační systémy, lékařství, kartografie a počítačové vidění.

Zde se zaměříme na lékařské aplikace. V lékařství slouží registrace obrazu k získání úplnější informace o pacientovi, například umožňuje sledovat růst nádoru, ověřit úspěšnost léčby nebo srovnat údaje pacienta s anatomickými atlasy.

Vzhledem k různorodosti registrovaných obrazů a vzhledem k různým typům deformací není možné navrhnout univerzální metodu pro všechny úkoly registrace. Každá metoda by měla brát v úvahu předpokládaný typ deformace mezi obrazy a případné zašumění. Například pro snímky kostí očekáváme pouze tuhé deformace, kdežto pro měkkou tkáň lze očekávat pružnou deformaci. Další problémovou oblastí je míra odborných znalostí, která může zlepšit výběr konkrétní metody.

Registrace obrazu může být rozdělena na ty, které jsou založeny na intenzitě, a ty, které jsou založeny na význačných rysech. Metody založené na intenzitě srovnávají intenzitu v obrazech pomocí srovnávací metriky a zahrnují tak informace z celého obrazu. Pro obrazy pořízené různými technikami (CT, MR, PET atd.), kde si intenzity vzájemně neodpovídají, je třeba použít k tomu určené metody, velmi často využívaná je například metoda tzv. vzájemné informace. Metody založené na význačných rysech hledají korespondence mezi danými rysy obrazu, jako jsou body, čáry nebo kontury, což sice zjednodušuje úlohu, ale zároveň může přinést nechtěné výsledky pro zbývající části. Navíc ani definování význačných rysů ani určení odpovídajících rysů v druhém obraze není snadný úkol a systém pro plně automatickou detekci význačných rysů v lékařských snímcích stále chybí.

Metody registrace obrazu mohou být také klasifikovány podle modelů transformace. První obsáhlou kategorií jsou lineární transformace, mezi které patří translace, rotace, změna měřítka a další afiní transformace. Tyto tuhé transformace jsou však velmi omezující a tak často nedostačují. Druhá kategorie transformací umožňuje pružnou (poddajnou) transformaci. Tyto transformace jsou schopny lokální deformace obrazu. Patří mezi ně například transformace pomocí radiálních báзовých funkcí (tzv. thin-plane spline metoda) nebo fyzikální modely kontinua (elastická registrace). Další způsoby kategorizace metod registrace obrazu lze nalézt v [1].

Tato práce čerpá hlavně z [2], kde jsou metody registrace obrazu rozděleny na parametrické a neparametrické. Parametrické metody vyjadřují požadovanou transformaci pomocí kombinace konečného počtu zvolených báзовých funkcí. Registrace tedy závisí na výpočtu optimálních parametrů - koeficientů báзовých funkcí. Neparametrická registrace hledá transformaci na základě zvolené regularizace a míry vzdálenosti. Parametry použité při této registraci nejsou koeficienty báзовých funkcí, ale vycházejí z fyzikálního modelu. Není-li uvedeno jinak jsou důkazy uvedených vět v [2].



V první kapitole uvedeme některé základní pojmy, na které se budeme dále odkazovat. Dále se seznámíme s parametrickými metodami, konkrétně s metodou význačných bodů, s hladkou metodou význačných bodů, s metodou hlavních os a metodami optimální lineární registrace. Následuje kapitola o elastické registraci, jakožto zástupci neparametrických metod. Zmíníme se také o implementaci zmíněných metod a ukážeme si výsledky jejich experimentálního využití.

Další přehled a popis různých metod registrace lze nalézt v [3], v [4] lze nalézt stručný přehled metod používaných přímo v oblasti lékařství a [5] se zaměřuje přímo na neparametrické metody.

## 2 Matematický základ

### 2.1 Definice obrazu

Použijeme model dvourozměrného obrazu, který přiřazuje každému bodu  $x$  z určité množiny  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  intenzitu šedi  $b(x)$ . Abychom se vyhnuli neúčelné obecnosti, budeme předpokládat další vlastnosti  $b$ .

**Definice 2.1** Funkci  $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme dvourozměrným obrazem, jestliže

1.  $b$  má kompaktní support,
2.  $0 \leq b(x) < \infty$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}^2$ ,
3.  $\int_{\mathbb{R}^2} b(x)^k dx$  je konečný pro  $k > 0$ .

Množinu všech obrazů označíme

$$\text{Img}(2) := \{b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid b \text{ je dvourozměrný obraz}\}.$$

Obraz je tedy dvourozměrná funkce intenzity světla a hodnota  $b(x)$  udává intenzitu obrazu v souřadnicích  $x \in \mathbb{R}^2$ . Přestože definice 2.1 1) je na první pohled omezující, pro účely registrace obrazů lidského těla se zdá být přirozená, protože lidské tělo nebo jeho části jsou ohraničené. Definice 2.1 3) odpovídá přirozeně omezenosti světelné energie.

Obrazy s kterými budeme pracovat jsou vyjádřeny diskrétními daty, ale volbou vhodného způsobu interpolace můžeme dokonce předpokládat, že jsou obrazy libovolně hladké, viz podkapitola 2.3.

### 2.2 Diskretizace spojitého obrazu

Pro obraz  $b \in \text{Img}(2)$  předpokládáme, že *support* obrazu  $b$  je obsažen v oblasti  $\Omega$ , kde pro snadnost prezentace předpokládáme

$$\Omega := (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2,$$

a hranici  $\Omega$  označíme  $\partial\Omega$ . Diskrétní obraz  $B$  pak definujeme

**Definice 2.2** Necht'  $b \in \text{Img}(2)$  a  $\Omega_2$  je  $n_1 \times n_2$  grid. Pak matici

$$B := (b(x_{j,k}))_{\substack{j=1,\dots,n_1 \\ k=1,\dots,n_2}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2},$$

nazveme dvourozměrným diskrétním obrazem.

Kde grid je definován následně

**Definice 2.3** *Necht'  $\Omega = (0, 1)^2$  a  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  jsou daná čísla. Body*

$$x_{j,k} = (x_j, x_k)^\top \in \Omega \cup \partial\Omega,$$

*kde  $1 \leq j \leq n_1$  a  $1 \leq k \leq n_2$ , nazveme body gridu. Pole*

$$X := (x_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq n_1 \\ 1 \leq k \leq n_2}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$$

*je matice gridu.*

*Necht'  $N := n_1 n_2$  a necht' každému číslu  $l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq N$  je přiřazena uspořádaná dvojice  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$  pomocí lexikografického uspořádání  $l = (k - 1)n_1 + j$ . Vektor  $\vec{X} := (x_l)_{l=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$ , kde  $x_l = x_{j,k}$  nazveme vektorem gridu. Množinu  $\Omega_2 := \{x_l, l = 1, \dots, N\}$  nazveme  $n_1 \times n_2$  gridem.*

V souvislosti s diskretizací parciálních diferenciálních rovnic v části 4 nyní uvedeme periodický grid.

**Definice 2.4** *Necht'  $\Omega = (0, 1)^2$  a  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  jsou daná čísla. Pro  $1 \leq j \leq n_1, 1 \leq k \leq n_2$ , necht'*

$$x_l := \left( \frac{j-1}{n_1}, \frac{k-1}{n_2} \right)^\top,$$

*jsou body gridu.*

Pro úplnost zmíníme, že pro obrazy, s kterými budeme pracovat, platí

$$b(x_{j,k}) \in \{0, \dots, 255\} \text{ pro } \forall x_{j,k} \in \Omega \cup \partial\Omega.$$

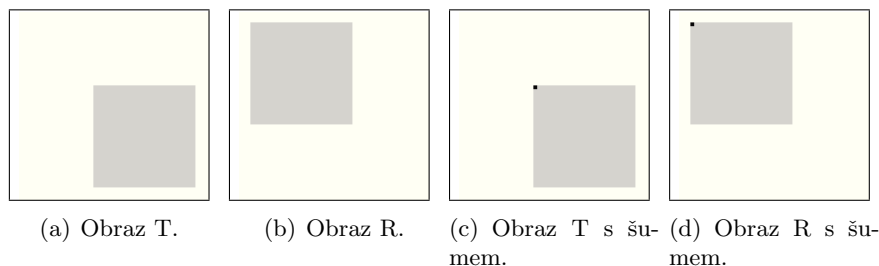
### 2.3 Interpolace diskrétního obrazu

V některých situacích můžeme také chtít hodnotu obrazu v jiném bodě než v gridu. Budeme tedy potřebovat interpolační schéma  $\mathcal{I}$ ,

$$\mathcal{I} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Pro obraz  $B$  je přiřazena hodnota intenzity  $\mathcal{I}(B, x)$  v jakémkoli bodě  $x \in \mathbb{R}^2$ . Pro  $x \notin \Omega$  definujeme  $\mathcal{I}(B, x) := 0$ . Pro naše účely budeme používat bilineární interpolaci. Výhodou bilineární interpolace je spojitá reprezentace a nenáročnost na výpočetní čas. Nevýhodou je vyplývající nediferencovatelnost globální funkce.

$$\mathcal{I}(B, x) := \sum_{k \in \{0,1\}^2} B(\lfloor x_1 \rfloor + k_1, \lfloor x_2 \rfloor + k_2) (-1)^{k_1} (\lfloor x_1 \rfloor + 1 - k_1 - x_1) (-1)^{k_2} (\lfloor x_2 \rfloor + 1 - k_2 - x_2)$$



Obrázek 2.1: Nejednoznačnost výsledků.

## 2.4 Problém registrace

Jak již bylo řečeno, registrace obrazu je založena na hledání vhodné transformace jednoho obrazu, tak aby se v určitém smyslu podobal jinému obrazu. Jeden z obrazů nazveme cílový  $R$  a druhý jako deformovaný  $T$ . Hledáme transformaci  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tak, aby referenční obraz  $R$  a deformovaný obraz  $T_\varphi$  byly podobné, kde

$$T_\varphi(x) := T \circ \varphi(x) = T(\varphi(x)).$$

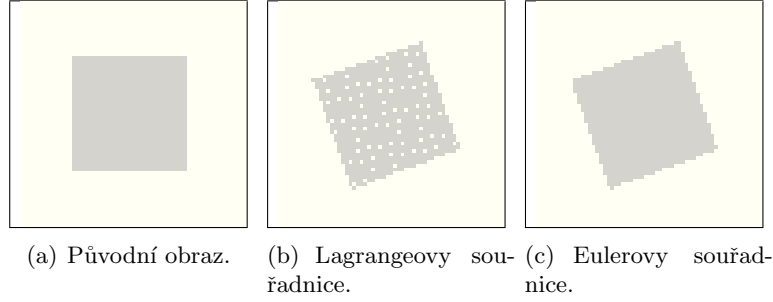
V mnoha praktických aplikacích je tento problém ještě těžší. Důvodem je, že obrazy  $T$  a  $R$  ukazují podobné objekty, které se něčím odlišují. Typické příklady zahrnují registraci snímků pořízených před a po operaci pacienta nebo registraci po sobě jdoucích tkáňových řezů. Cílem registrace je odstranit umělé rozdíly způsobené například pohybem, ale přitom zachovat skutečné rozdíly v důsledku změn objektů.

Pro matematické zpracování tohoto problému potřebujeme vhodným způsobem měřit podobnost obrazů. Pokud jsou obrazy pořízeny různým zařízením, nemusí intenzita  $R(x)$  a  $T_\varphi(x)$  pro optimální  $\varphi$  odpovídat. V tomto případě je pak zapotřebí použít další funkci  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a porovnávat  $R(x)$  s  $g \circ T_\varphi(x) = g(T(\varphi(x)))$ . Nebo lze použít míru vzdálenosti, která nezávisí na intenzitě. V nadcházejících sekcích uvedeme různé míry vzdálenosti  $\mathcal{D}$ . Obecný zápis problému registrace zní takto.

**Problém 2.1** *Budiž dána míra vzdálenosti  $\mathcal{D} : \text{Img}(2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a dva obrazy  $R, T \in \text{Img}(2)$ , hledáme transformaci  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a funkci  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tak, aby*

$$\mathcal{D}(R, g \circ T \circ \varphi) = \min.$$

Problém 2.1 je špatně podmíněný, takže přímý přístup je nemožný a je třeba použít regularizace. Na obrázku 1(a) a 1(b) lze vidět další úskalí registrace. Možnou transformací je posun, ale i rotace obrazu o 180 stupňů kolem středu, také smysluplné, ale zcela jiné řešení. V případě složitější transformace je možná jakákoli permutace bodů stejné barvy. Problém se stává ještě citlivějším v přítomnosti šumu. Přidání jedné černé tečky v rozích obou snímků by vedlo k jedinečné transformaci určené tímto šumem, viz. obrázky 1(c) a 1(d). K tomuto extrému většinou však při práci s obrazy s více proměnlivou intenzitou nedochází. Tento příklad byl převzat z [4] a obrazy byly vytvořeny v programu MATLAB.



Obrázek 2.2: Rozdíl Lagrangeových a Eulerových souřadnic. Původní obraz byl rotovaný o  $\pi/9$ .

## 2.5 Lagrangeovy a Eulerovy souřadnice

Pro interpolaci obrazu existují dvě vztažné soustavy, které vychází z různých pohledů na pohyb v teorii proudění a pružnosti. Přístup Eulerových nebo také prostorových souřadnic může být znázorněn pozorovatelem, který sleduje určitý úsek svého okolí. Tyto souřadnice by se daly považovat za „klasické“ nebo také souřadnice před deformací. Lagrangeovy nebo také materiálové souřadnice vycházejí z opačného pohledu, kde se naopak pozorovatel pohybuje zároveň se sledovaným objektem. Jsou to tedy souřadnice po deformaci.

Budeme-li předpokládat, že je transformace  $\varphi$  invertibilní, můžeme psát  $\tilde{x} := \varphi(x)$  nebo ekvivalentně  $x = \tilde{\varphi}(\tilde{x}) := \varphi^{-1}(\tilde{x})$ , kde  $x$  jsou Eulerovi a  $\tilde{x}$  jsou Lagrangeovy souřadnice. Z výpočetního hlediska dostaneme

$$T_{\varphi}^{Lagrange}(\varphi(i, j)) := T(i, j) \quad \text{a} \quad T_{\varphi}^{Euler}(i, j) := T(\varphi^{-1}(i, j))$$

Obrázek 2.2 ilustruje praktický rozdíl mezi těmito dvěma soustavami. Při užití Lagrangeových souřadnic nezískáme hodnotu ve všech bodech transformovaného obrazu a Eulerovy souřadnice jsou tedy vhodnější. Příklad je převzat z [2], rotace obrazu byly provedeny pomocí programu MATLAB.

### 3 Parametrické metody

V této kapitole se budeme stručně věnovat různým technikám registrace obrazu, které jsou založeny na minimalizaci určité míry vzdálenosti, která se odvíjí od daných vlastností obrazu. Vlastnosti obrazu mohou být dány uživatelem (např. tzv. význačné body) nebo mohou být automaticky získány z intenzity obrazu (např. tzv. hlavní osy).

U všech navrhovaných technik je transformace parametrická, tj. může být vyjádřena pomocí parametrů  $\alpha_j$  a bazových funkcí  $\psi_j$ . Požadovaná transformace pak minimalizuje míru vzdálenosti v prostoru daných bazových funkcí a lze ji získat z algebraických rovnic nebo použitím vhodného optimalizačního nástroje.

#### 3.1 Metoda význačných bodů

Tato metoda využívá význačné body obrazu dané uživatelem (určené na základě znalostí uživatele nebo pomocí analýzy obrazu). Označme  $\mathcal{F}(R, j)$ , resp.  $\mathcal{F}(T, j)$   $j$ -tý význačný bod v cílovém obraze  $R$ , resp. transformovaném obraze  $T$ ,  $j = 1, \dots, m$ , kde  $m \in \mathbb{N}$  je počet daných bodů. Registrační problém pak zní takto

**Problém 3.1** *Necht'  $m \in \mathbb{N}$  a význačné body  $\mathcal{F}(R, j)$  a  $\mathcal{F}(T, j)$ ,  $j = 1, \dots, m$  jsou dány. Hledáme transformaci  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  takovou, že*

$$\mathcal{F}(R, j) = \varphi(\mathcal{F}(T, j)), j = 1, \dots, m.$$

Tento problém může být také formulován pomocí míry vzdálenosti

$$\mathcal{D}^{LM}[\varphi] := \sum_{j=1}^m \|\mathcal{F}(R, j) - \varphi(\mathcal{F}(T, j))\|^2, \quad (3.1)$$

kde používáme normu prostoru význačných bodů (v případě použití bodů obrazu je to norma  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ ), jako problém aproximace.

**Problém 3.2** *Necht'  $\mathcal{D}^{LM}$  je dán rovnicí (3.1). Hledáme transformaci  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  takovou, že  $\mathcal{D}^{LM}[\varphi] = \min$ .*

Význačné body obrazu jsou dány svými souřadnicemi  $\mathcal{F}(R, j) = x^{R,j}$ ,  $\mathcal{F}(T, j) = x^{T,j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Nyní vyjádříme transformaci  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  pomocí bazových funkcí  $\psi_k$  a koeficientů  $\alpha_{l,k}$

$$\varphi_l = \sum_{k=1}^n \alpha_{l,k} \psi_k, \quad \alpha_{l,k} \in \mathbb{R}, \quad \psi_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, l = 1, 2. \quad (3.2)$$

Pro jednoduchost předpokládáme, že báze  $\psi_k$  i jejich počet  $n$  jsou pro každé  $l$  stejné. A problém 3.2 můžeme přepsat na

**Problém 3.3** *Hledáme parametry  $\alpha_{l,k} \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $l = 1, 2$ , tak, že  $\mathcal{D}^{LM}[\varphi] = \min$ , kde  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  je dána rovnicí (3.2).*

Tedy

$$\mathcal{D}^{LM}[\varphi] = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^2 \left( x_l^{R,j} - \sum_{k=1}^n \alpha_{l,k} \psi_k(x^{T,j}) \right)^2 = \sum_{l=1}^2 \|y_l - \psi \alpha_l\|_{\mathbb{R}^2}^2,$$

kde pro  $l=1, 2$ ,

$$\begin{aligned} y_l &= (x_l^{R,1}, \dots, x_l^{R,m}) \in \mathbb{R}^m, \\ \psi &= (\psi_k(x^{T,j}))_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}} \mathbb{R}^{m \times n}, \\ \alpha_l &= (\alpha_{l,1}, \dots, \alpha_{l,n}) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Optimální parametry lze získat metodou nejmenších čtverců za výše uvedeného předpokladu nezávislosti  $\psi_k$  na  $l$ . Za předpokladu, že hodnota matice  $\psi$  je rovna  $n$ , je řešení jednoznačné.

### 3.2 Hladká metoda význačných bodů

Tento přístup je rozšířením předchozího o další omezení na hladkost pomocí funkcionálu  $\mathcal{S}$ , kde je hladkost měřena z hlediska zakřivení. Uvažujme funkcionál  $\mathcal{S}^{TPS}$  (TPS - thin plate spline) daný předpisem

$$\mathcal{S}^{TPS}[\varphi] := \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \langle \varphi_l, \varphi_l \rangle_q,$$

kde  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  a  $\langle f, g \rangle_q = \sum_{|\kappa|=q} c_\kappa \int_{\mathbb{R}^2} (D^\kappa f)(x) (D^\kappa g)(x) dx$ . Daný problém lze pak formulovat

**Problém 3.4** *Necht' je  $\alpha > 0$  dáno, hledáme transformaci  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  takovou, že*

$$\alpha \mathcal{S}^{TPS}[\varphi] + \mathcal{D}^{LM}[\varphi] \longrightarrow \min.$$

Lze ukázat, že minimum tohoto regularizovaného přístupu je opět parametrizováno: je to lineární kombinace posunů radiální bázové funkce a polynomiálních korekcí. Přesný postup odvození nalezení tohoto minima lze nalézt v [2]. My zmíníme pouze řešení ve tvaru

$$\varphi_l = \sum_{j=1}^m \theta_{l,j} \rho_{x_j} + \sum_{j=1}^{n_q} \beta_{l,j} p_j, l = 1, 2,$$

kde  $n_q = \dim(\prod_{q-1}^n)$  a  $p_1, \dots, p_{n_q}$  jsou bázové funkce  $\prod_{q-1}^n$  a kde  $\rho_{x_j} = \rho(\|\cdot - x_j\|_{\mathbb{R}^n})$  pro radiální bázové funkce

$$\rho(r) := \frac{(-1)^{q+2}}{2^{2q-1} \pi (q-1)! (q-1)!} r^{2q-2} \log r.$$

Pro  $l = 1, 2$  jsou koeficienty  $\theta_l := (\theta_{l,1}, \dots, \theta_{l,m}) \in \mathbb{R}^m$  a  $\beta_l := (\beta_{l,1}, \dots, \beta_{l,n_q}) \in \mathbb{R}^{n_q}$  určeny

$$\begin{pmatrix} K + \alpha I & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_l \\ \beta_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_l \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde  $y_l := (x_l^{R,j}, \dots, x_l^{R,m}) \in \mathbb{R}^m$  a matice  $K := (\rho(\|x_j - x_k\|_{\mathbb{R}^n}))_{j,k=1,\dots,m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  a  $B := (p_j(x_k))_{\substack{j=1,\dots,n_q \\ k=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n_q \times m}$  nezávisí na  $l$ .

### 3.3 Metoda hlavních os

V této metodě považujeme obraz za funkci hustoty nebo rozdělení hmoty. Díky tomuto přístupu získáme vlastnosti obrazu (tzv. hlavní osy) automaticky, což je oproti předchozí metodě velkou výhodou.

**Definice 3.1** *Necht'  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je obraz. Definujme střední hodnotu funkce  $f$  vzhledem k  $B$*

$$\mathbb{E}_B[f] := \frac{\int_{\mathbb{R}^2} f(x)B(x)dx}{\int_{\mathbb{R}^2} B(x)dx}.$$

*Pro  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ , položíme  $\mathbb{E}_B[u] := (\mathbb{E}_B[u_{j,k}])_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Střed obrazu je definován jako*

$$c_B := \mathbb{E}_B[x] \in \mathbb{R}^2$$

*a kovariance*

$$Cov_B := \mathbb{E}_B[(x - c_B)(x - c_B)^\top] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Jestliže je kovarianční matice reálná, symetrická a pozitivně semidefinitní, umožňuje spektrální rozklad

$$Cov_B = U_B D_B^2 U_B^\top,$$

kde  $U_B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  je unitární matice a matice  $D_B = \text{diag}(\sigma_{B,1}, \sigma_{B,2}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  je diagonální. Pro další užití seřadíme sloupce  $U_B$  tak, že pro rozptyly platí  $\sigma_{B,1} \geq \sigma_{B,2}$ . Jestliže jsou vlastní čísla matice  $Cov_B$  jednoduchá (násobnosti jedna), pak je rozklad jedinečný až na označení sloupců  $D_B$ .

Matice  $U_B$  lze také zapsat

$$U_B = U(\rho_B) = \begin{pmatrix} \cos \rho_B & -\sin \rho_B \\ \sin \rho_B & \cos \rho_B \end{pmatrix}.$$

Směr hlavních os je pak dán vektorem  $(\cos \rho_B, \sin \rho_B)^\top$  a směr vedlejší osy je dán vektorem  $(-\sin \rho_B, \cos \rho_B)^\top$ . Tedy úhel  $\rho_B$  může být použit k popisu obou os. Rozptyly jsou znázorněny délkou os a střed obrazu je průsečíkem os. Za vlastnosti obrazu můžeme vzít tyto čísla:  $\rho_B, \sigma_{B,1}, \sigma_{B,2}, c_{B,1}, c_{B,2}$ .

**Věta 3.1** *Necht'  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je obraz se středem  $c_B$  a kovarianční maticí  $Cov_B$ . Navíc necht'  $\hat{B} := B(Ax + b)$ , kde  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\det(A) > 0$  a  $b \in \mathbb{R}^2$ . Pak*

$$c_B = Ac_{\hat{B}} + b \text{ a } Cov_B = ACov_{\hat{B}}A^\top.$$

Věta 3.1 nám udává, jak se změní střed a kovariance matice  $\hat{B} := B \circ \varphi$ , kde  $\varphi(x) = Ax + b$  je afinní lineární zobrazení,  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\det(A) > 0$ . Cílem této metody je tedy využít věty 3.1 a najít transformaci tak, aby se střed a kovariance cílového obrazu rovnali středu a kovarianci transformovaného obrazu.



**Věta 3.2** *Necht'  $R$  a  $T$  jsou obrazy se středy  $c_R$  a  $c_T$  a regulárními kovariančními maticemi  $Cov_R$  a  $Cov_T$ . Definujme zobrazení  $\hat{T} := T(Ax + b)$ , kde*

$$A := U_T D_T M D_R^{-1} U_R^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, b := c_T - A c_R \in \mathbb{R}^2$$

*$M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  je libovolná unitární matice a  $Cov_R = U_R D_R^2 U_R^\top$  a  $Cov_T = U_T D_T^2 U_T^\top$  jsou spektrální rozklady. Pak*

$$c_{\hat{T}} = c_R \text{ a } Cov_{\hat{T}} = Cov_R.$$

### 3.4 Optimální lineární registrace

Tato registrace je založena na hledání vhodné míry vzdálenosti, jejíž volba není jednoduchá. Zde si ukážeme příklady založené na intenzitě a korelaci. Budeme předpokládat, že použité transformace jsou z množiny afinních lineárních zobrazení, tedy  $\varphi \in \Pi_1^2(\mathbb{R}^2)$ . Hlavní výhodou této množiny je, že můžeme její prvky vyjádřit pomocí koeficientů. Prvek  $\varphi \in \Pi_1^2(\mathbb{R}^2)$ , pak značíme  $\varphi_a$ .

$$\varphi_{a,l}(x) = a_{l,0} + \sum_1^2 a_{l,j} x_j, \quad l = 1, 2$$

$$a = (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2})^\top \in \mathbb{R}^6$$

Tedy položíme  $D(a) := D[\varphi_a]$  a  $T_a := T \circ \varphi_a$  a formulujeme problém

**Problém 3.5** *Hledáme  $a \in \mathbb{R}^6$ , takové že  $D(a) = \min$ .*

#### 3.4.1 Registrace založená na intenzitě obrazu

Tento přístup je založen na minimalizaci tzv. součtu čtverců rozdílů.

**Definice 3.2** *Necht'  $R$  a  $T \in \text{Img}(2)$ . Definujme míru vzdálenosti  $\mathcal{D} : \text{Img}(2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$\mathcal{D} := \frac{1}{2} \|T - R\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (T(x) - R(x))^2 dx$$

*Pro transformaci  $\varphi_a$  definujeme*

$$D(R, T; a) = \mathcal{D}[R, T \circ \varphi_a].$$

K nalezení minima použijeme Gauss-Newtonovu metodu. Z Taylorova polynomu dostáváme

$$\begin{aligned} D(R, T; a + b) &= \frac{1}{2} \|T_{a+b} - R\|_{L_2}^2 \\ &\approx \frac{1}{2} \left\| T_a - R + \nabla_a T_a^\top b \right\|_{L_2}^2 \end{aligned}$$

Minimalizací vzhledem k  $b$  dostáváme problém nejmenších čtverců. Tedy pro pevné  $a$  je řešení charakterizováno normálními rovnicemi

$$M(a)b = f(a),$$

kde  $M(a) := (m_{j,k}(a)) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $f(a) := (f_j(a)) \in \mathbb{R}^6$  a

$$\begin{aligned} m_{j,k}(a) &= \langle \partial_{a_j} T_a, \partial_{a_k} T_a \rangle_{L_2}, \\ f_j(a) &= \langle T_a - R, \partial_{a_j} T_a \rangle_{L_2}. \end{aligned}$$

V každé iteraci tedy vypočteme  $b$  a další krok počítáme s  $a = a + b$ .

### 3.4.2 Registrace založená na korelaci

**Definice 3.3** *Necht'  $R$  a  $T \in \text{Img}(2)$ . Korelace mezi  $R$  a  $T$  je dána*

$$\text{Corr} : \text{Img}(2)^2 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Corr}_{R,T}(y) := \int_{\mathbb{R}^2} R(x)T(x-y)dx.$$

Na korelaci můžeme pohlížet jako na  $L_2$ -skalární součin mezi  $R$  a  $T(\cdot - y)$ . Jestliže jsou obrazy normalizovány a mají tedy jednotkovou velikost, je korelace kosinus úhlu mezi těmito dvěma obrazy. Maximalizací korelace vzhledem k  $y$  dostaneme obraz  $T(\cdot - y)$  blízký k  $R$  (tedy oba obrazy jsou maximálně lineárně závislé). Obvykle se k normalizaci používají statistiky - střední hodnota a směrodatná odchylka. Z tohoto důvodu budeme předpokládat, že support množiny uvažovaných obrazů je obsažen v oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Pro jednoduchost (a bez ztráty na obecnosti) budeme také předpokládat, že  $\Omega = (0,1)^2$  a tedy  $|\Omega| := \int_{\Omega} dx = 1$ .

**Definice 3.4** *Necht'  $B \in \text{Img}(2)$  je obraz. Střední hodnota  $\mu$  a směrodatná odchylka  $\sigma$  obrazu  $B$  je definována jako*

$$\mu(B) := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} B(x)dx \quad \text{a} \quad \sigma(B) := \mu((B - \mu(B))^2).$$

**Definice 3.5** *Korelační koeficient je definován jako  $\gamma := \text{Img}(2)^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$\gamma(R, T; y) := \left\langle \frac{R - \mu(R)}{\sigma(R)}, \frac{T_y - \mu(T_y)}{\sigma(T_y)} \right\rangle_{L_2},$$

kde  $T_y(x) = T(x - y)$ .

Metriku pak definujeme na základě korelačního koeficientu.

**Definice 3.6** Necht'  $R$  a  $T \in \text{Img}(2)$ . Definujme metriku  $\mathcal{D} : \text{Img}(2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}[R, T] := \left\langle \frac{R - \mu(R)}{\sigma(R)}, \frac{T - \mu(T)}{\sigma(T)} \right\rangle_{L_2}$$

a pro transformaci  $\varphi_a$  položme

$$D[R, T; a] = \mathcal{D}[R, T \circ \varphi_a].$$

Lze ukázat, že maximalizace v metrice založené na korelaci je úzce spojena s minimalizací v metrice založené na intenzitě obrazu.

### 3.5 Ukázka parametrické registrace

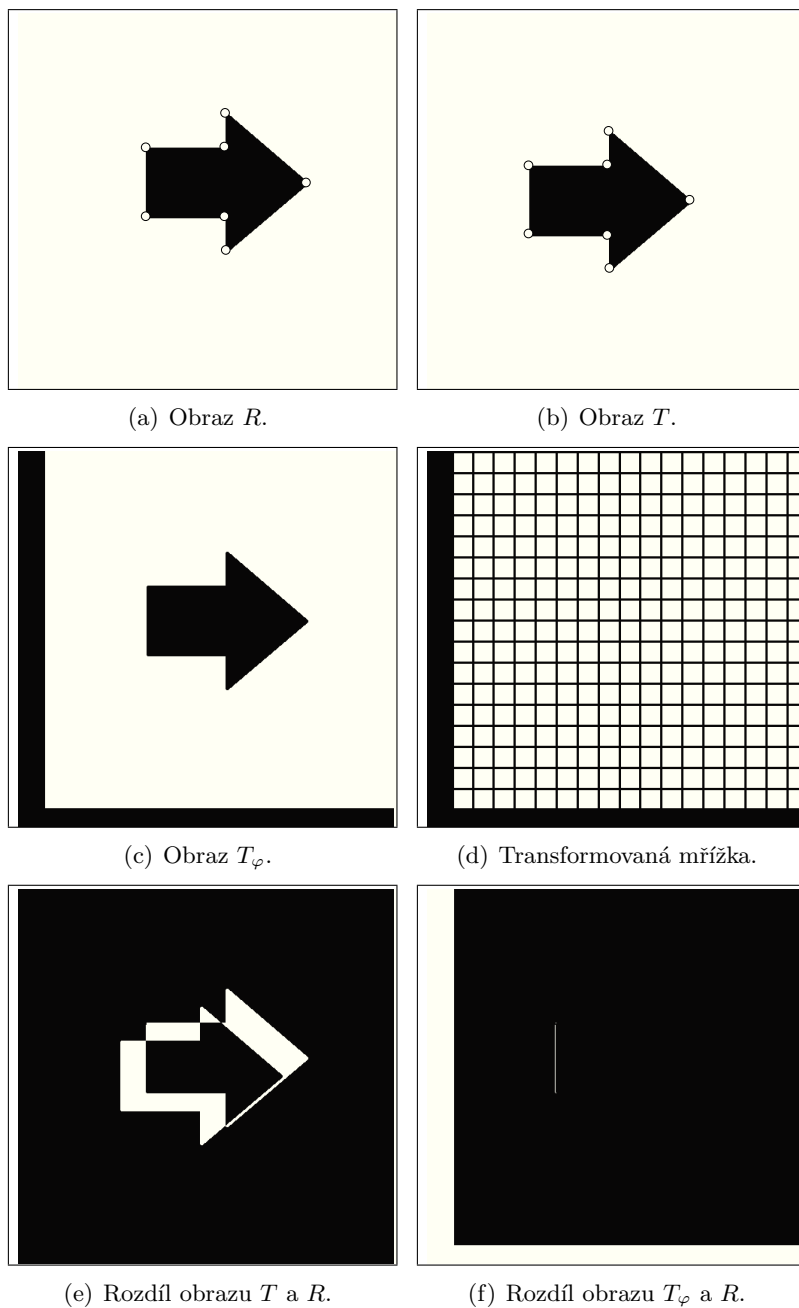
Nyní si na příkladech různých deformací ukážeme výsledky použití implementovaných parametrických metod. Více k samotné implementaci v kapitole 5. Obraz  $T$  je černá šipka na bílém pozadí a obrazy  $R$  vznikly použitím následujících deformací

- posun,
- rotace,
- deformace „rybí oko“ (deformace napodobující typ objektivu),
- kombinace všech.

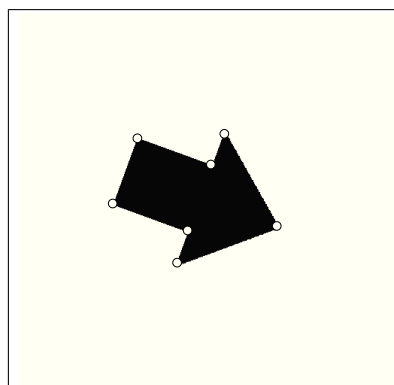
Za význačné body byly vybrány rohy obrazy, které by bylo možno snadno vybrat automaticky, ale které nereflektovaly pružné změny. Pro metodu hlavních os bylo třeba intenzitu šedi pozadí a objektu vyměnit z důvodu reprezentace černé barvy hodnotou 0 a bílé barvy hodnotou 255. Objekt pak má menší vliv na získané vlastnosti obrazu (střed a korelaci), což může vést k špatným výsledkům. Tento problém je ilustrován obrázkem 3.13, kde přestože jsou vlastnosti obrazu  $R$  i výsledného  $T_\varphi$  shodné, je patrné, že výsledná transformace neodpovídá očekávání. Jak uvidíme v kapitole 6, v lékařských snímcích není nutné tento problém řešit, pozadí snímku je totiž černé.

Výsledky jednotlivých metod:

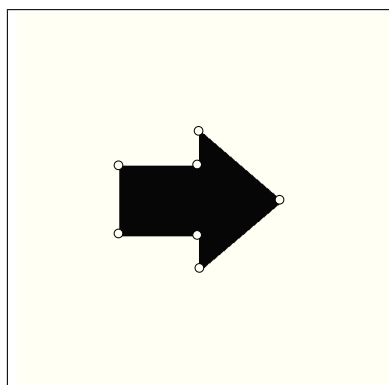
- Význačné body - metoda si velice dobře poradila s tuhou deformací, ale s pružnou deformací již ne. Z deformace „rybí oko“ byla zaregistrována pouze tuhá část, tedy změna měřítko. Možným vylepšením by bylo zvětšit počet význačných bodů v oblasti pružné deformace.
- Hladké význačné body - pro tuhé deformace jsou výsledky téměř shodné jako s nehladkou metodou, ani vliv parametru  $\alpha$  není příliš patrný. Avšak pro  $\alpha = 0$  již metoda dosahuje pro pružnou deformaci lepších výsledků.
- Hlavní osy - metoda dosáhla obdobných výsledků jako metoda význačných bodů.
- Optimální lineární registrace - metoda dosáhla obdobných výsledků jako metoda význačných bodů, je však nepoměrně náročnější (počítáno s ukončující podmínkou na velikost změny  $b(10^{-5})$  nebo na maximum iterací(200)).



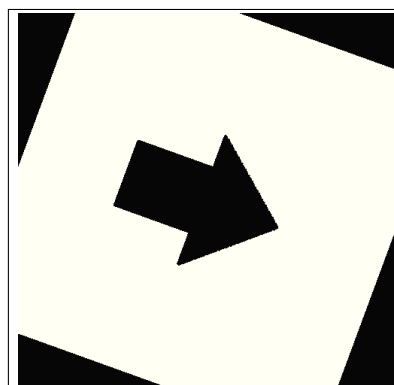
Obrázek 3.1: Význačné body - posun.



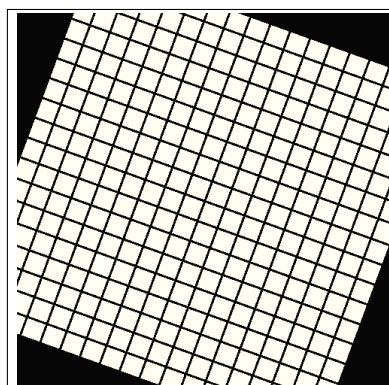
(a) Obraz  $R$ .



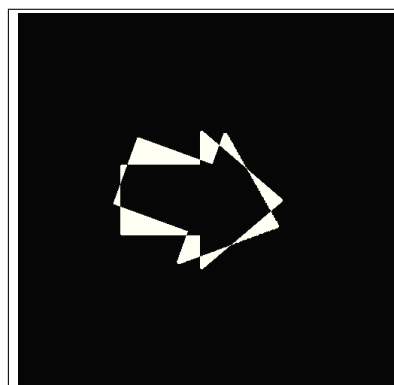
(b) Obraz  $T$ .



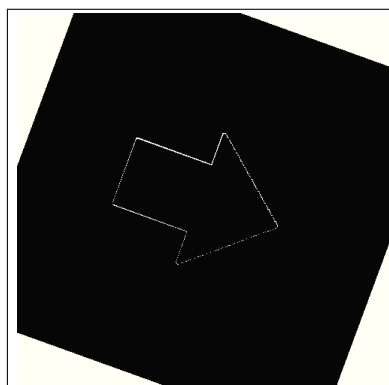
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

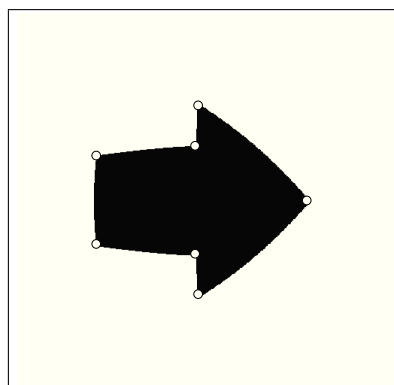


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

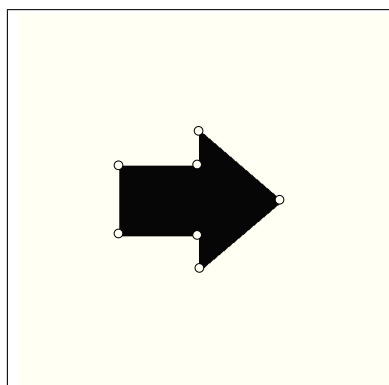


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

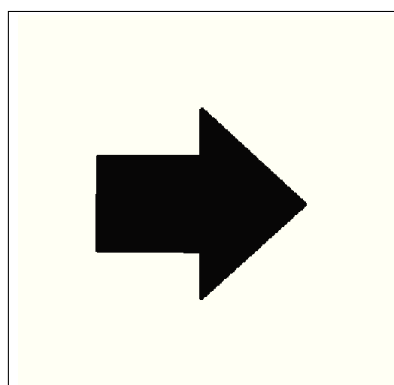
Obrázek 3.2: Význačné body - rotace.



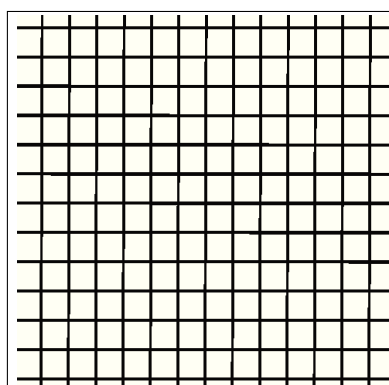
(a) Obraz  $R$ .



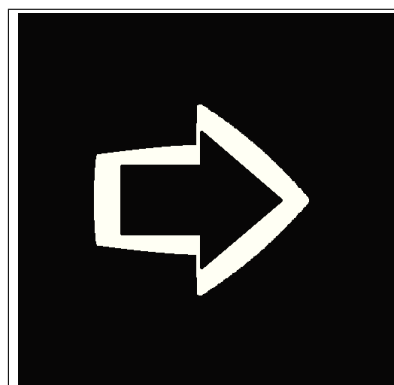
(b) Obraz  $T$ .



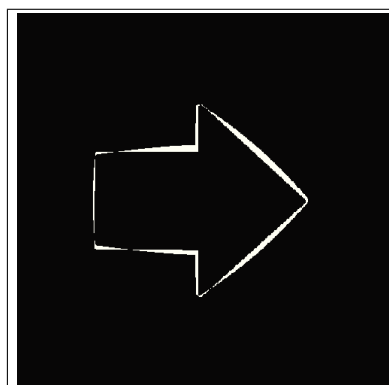
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

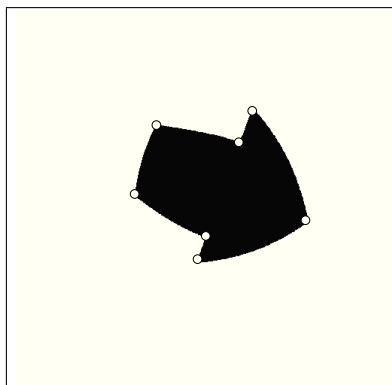


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

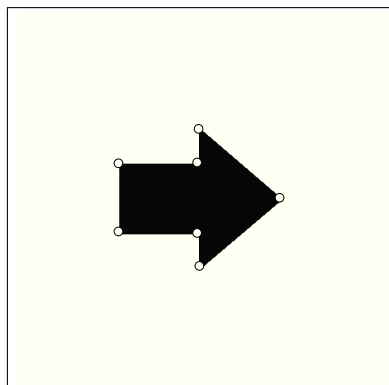


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

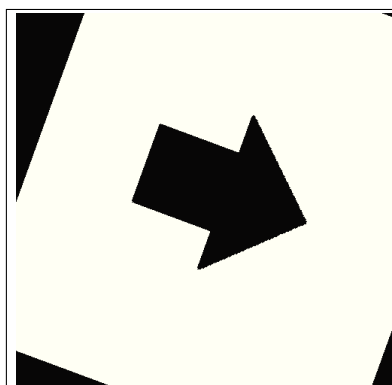
Obrázek 3.3: Význačné body - „rybí oko“.



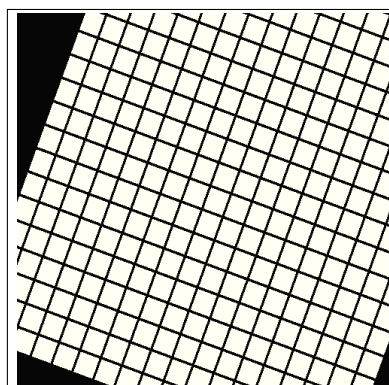
(a) Obraz  $R$ .



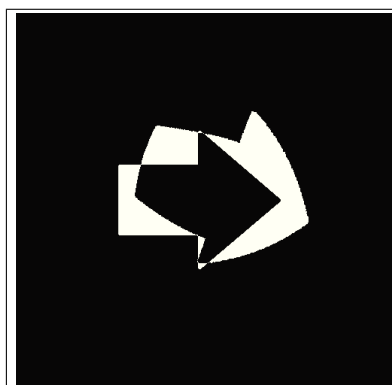
(b) Obraz  $T$ .



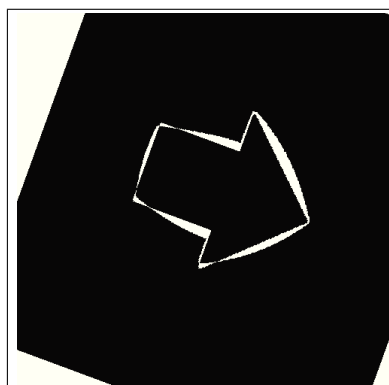
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

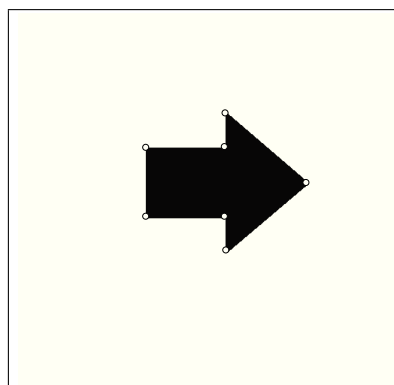


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

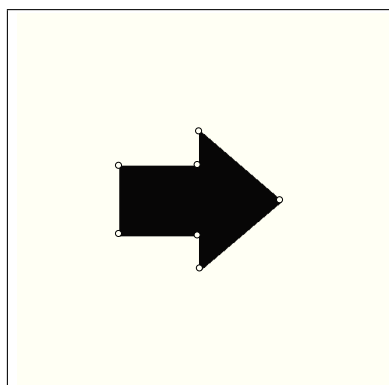


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

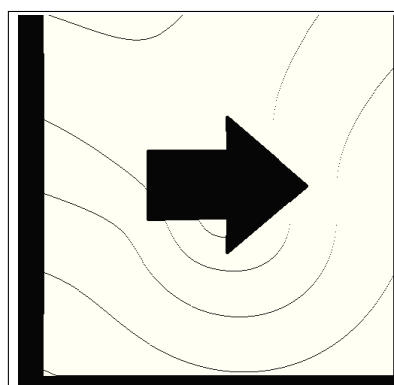
Obrázek 3.4: Význačné body - kombinace.



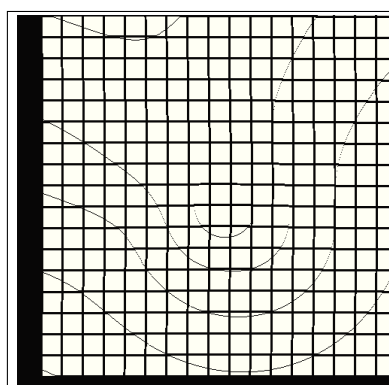
(a) Obraz  $R$ .



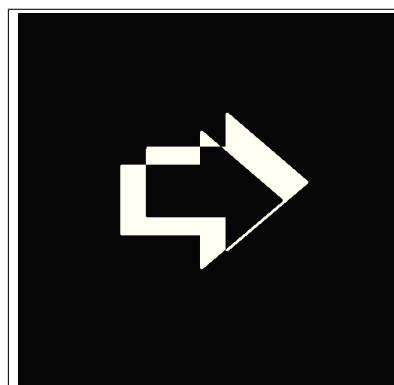
(b) Obraz  $T$ .



(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.



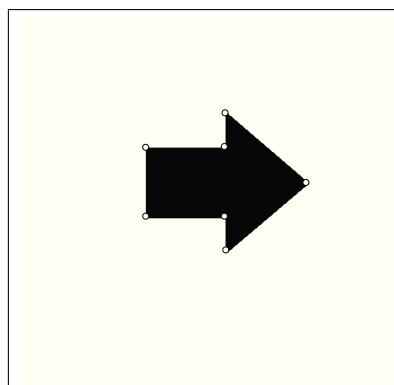
(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .



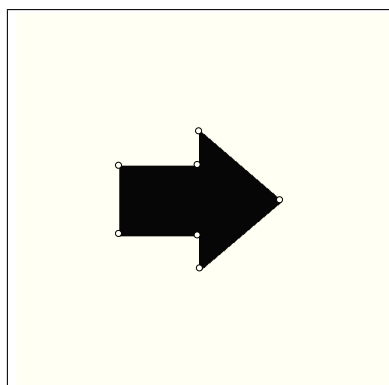
(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

Obrázek 3.5: Hladké význačné body - posun,  $\alpha = 0$ .

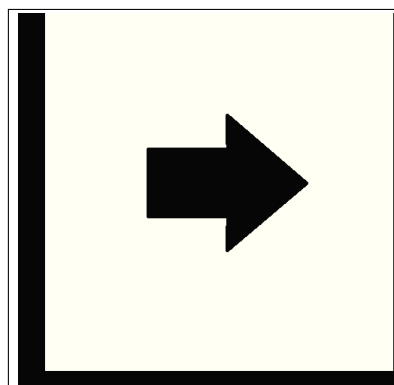




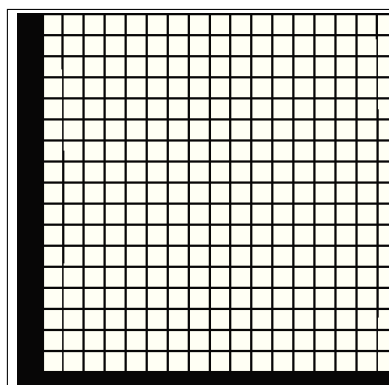
(a) Obraz  $R$ .



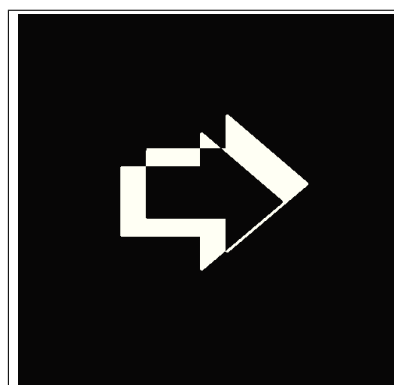
(b) Obraz  $T$ .



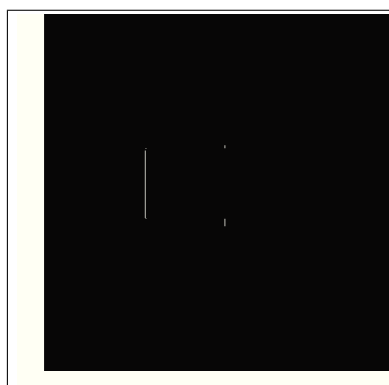
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

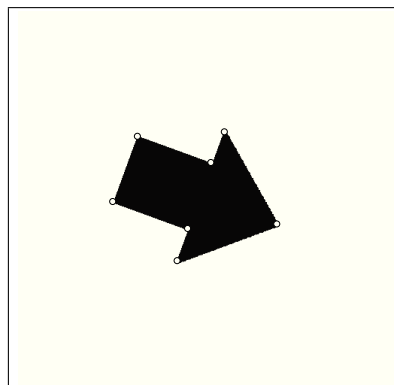


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

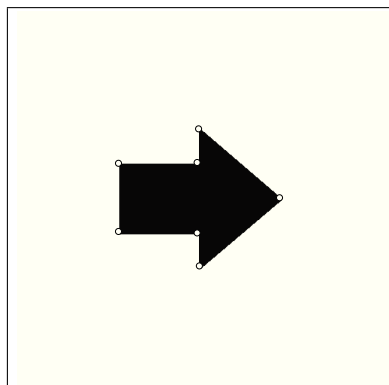


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

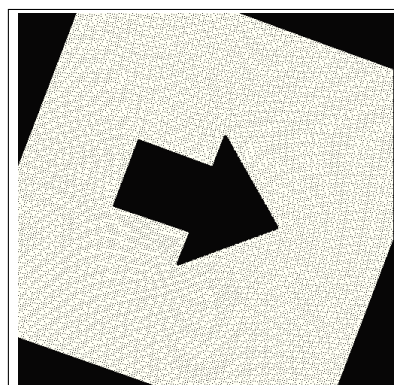
Obrázek 3.6: Hladké význačné body - posun,  $\alpha = 10^4$ .



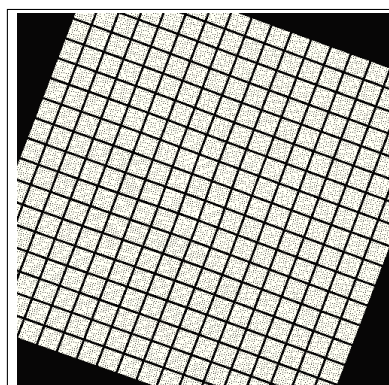
(a) Obraz  $R$ .



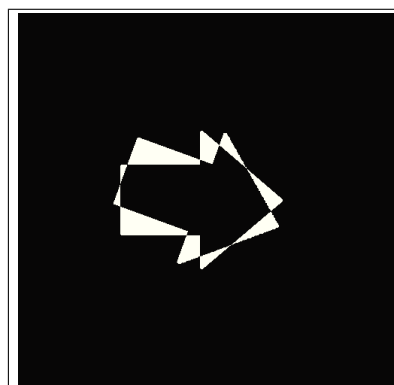
(b) Obraz  $T$ .



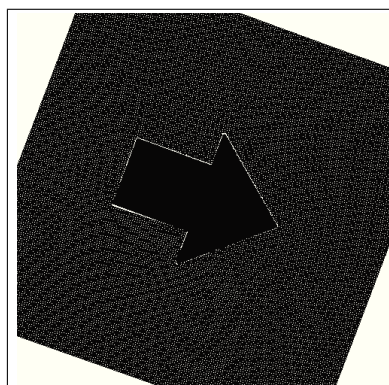
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

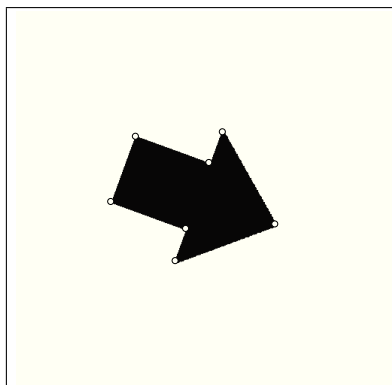


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

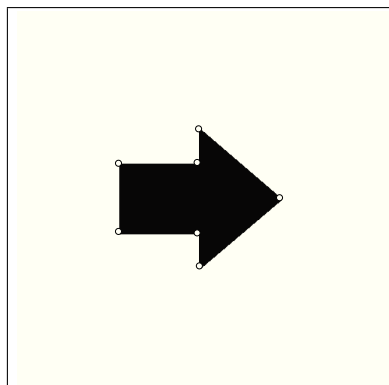


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

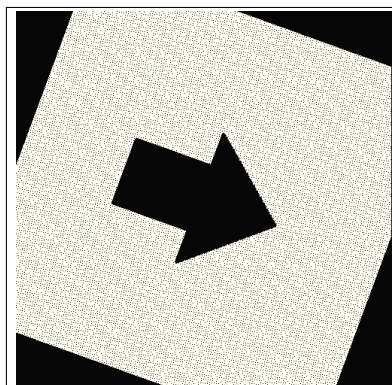
Obrázek 3.7: Hladké význačné body - rotace,  $\alpha = 0$ .



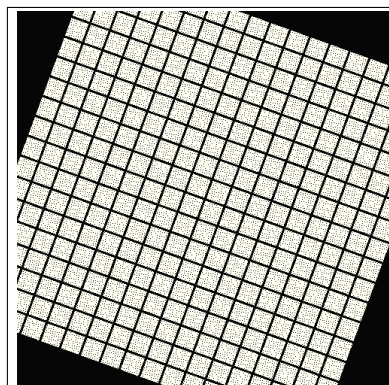
(a) Obraz  $R$ .



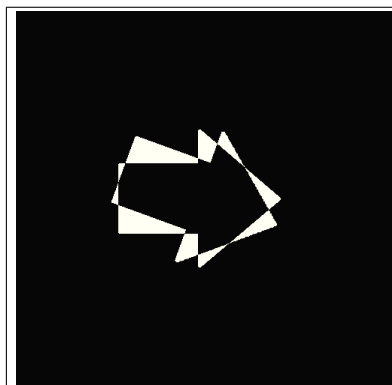
(b) Obraz  $T$ .



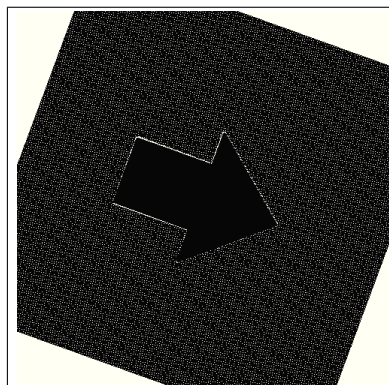
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

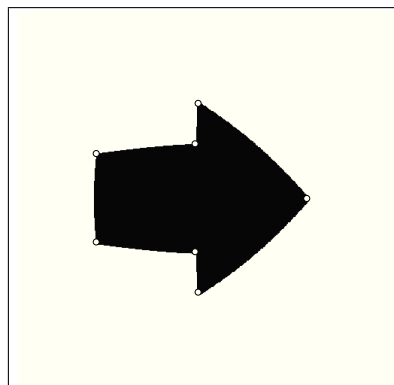


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

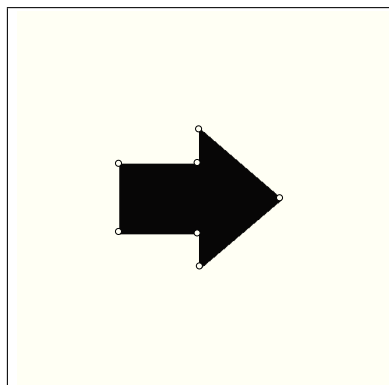


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

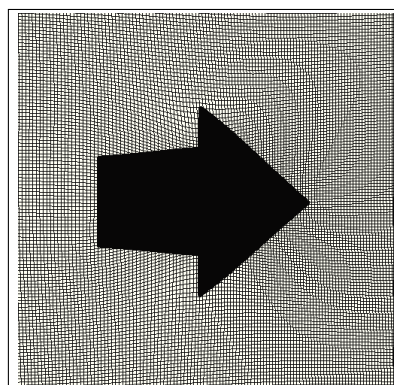
Obrázek 3.8: Hladké význačné body - rotace,  $\alpha = 10^4$ .



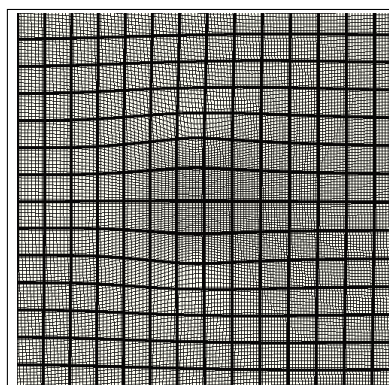
(a) Obraz  $R$ .



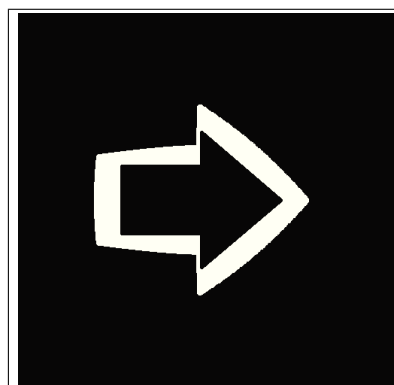
(b) Obraz  $T$ .



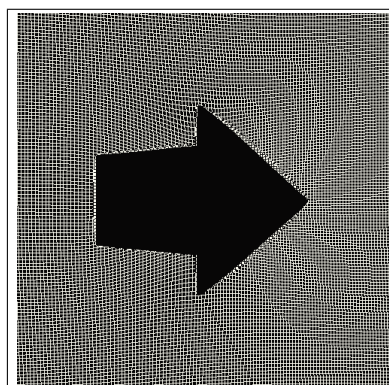
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

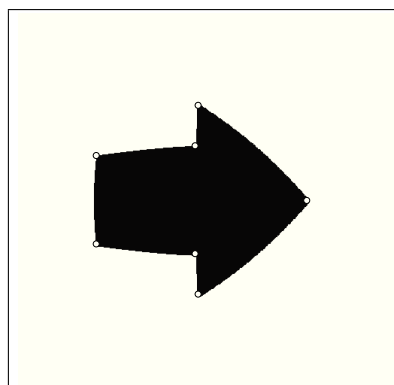


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

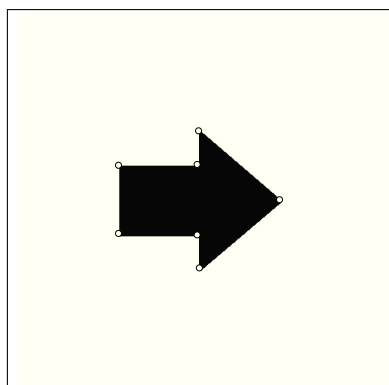


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

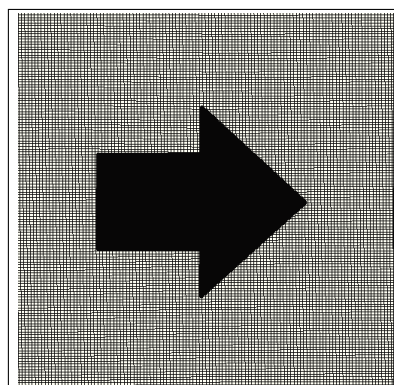
Obrázek 3.9: Hladké význačné body - „rybí oko“,  $\alpha = 0$ .



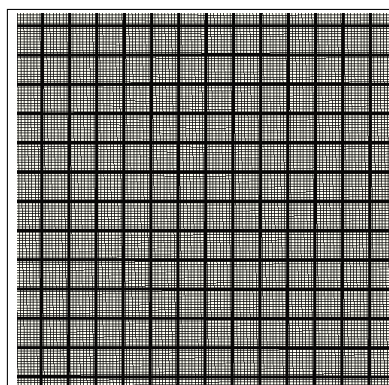
(a) Obraz  $R$ .



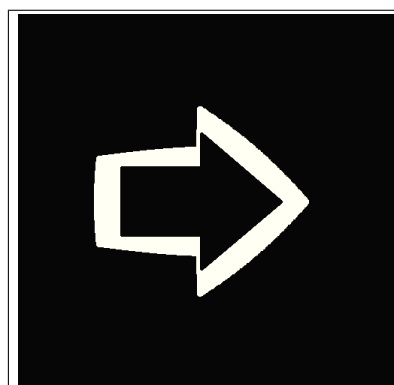
(b) Obraz  $T$ .



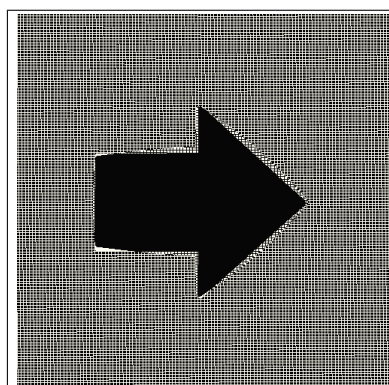
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

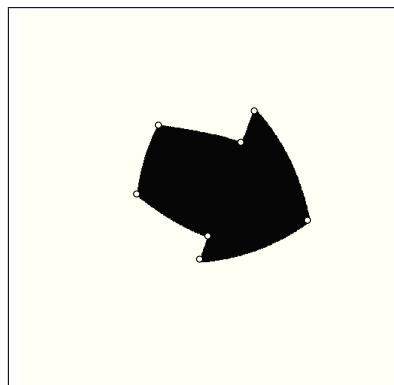


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

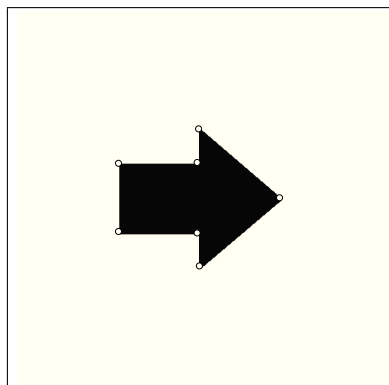


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

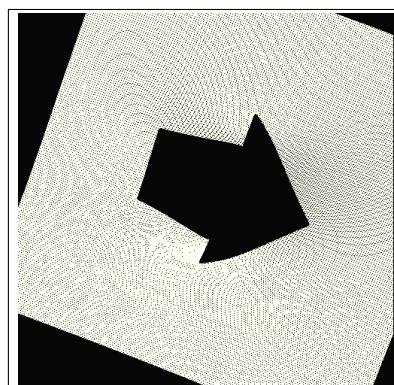
Obrázek 3.10: Hladké význačné body - „rybí oko“,  $\alpha = 10^4$ .



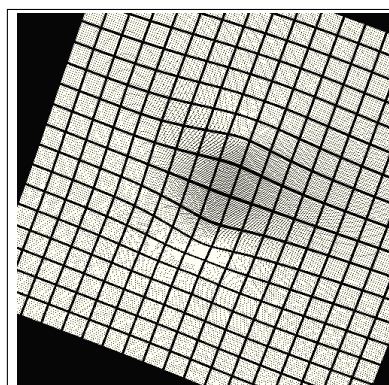
(a) Obraz  $R$ .



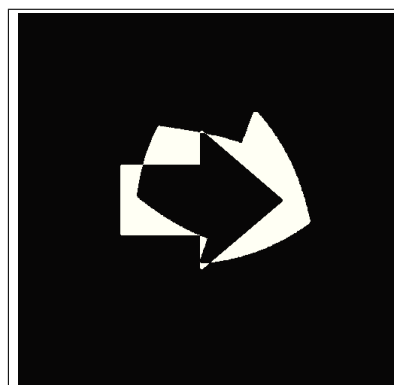
(b) Obraz  $T$ .



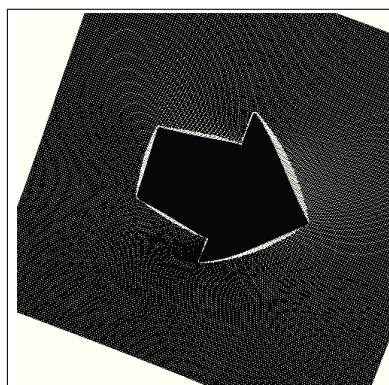
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

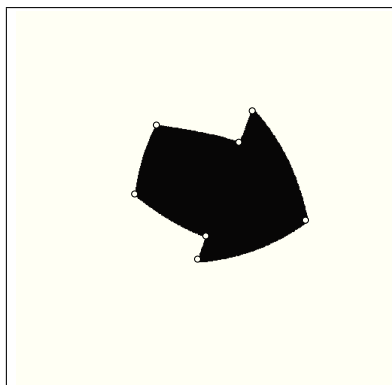


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

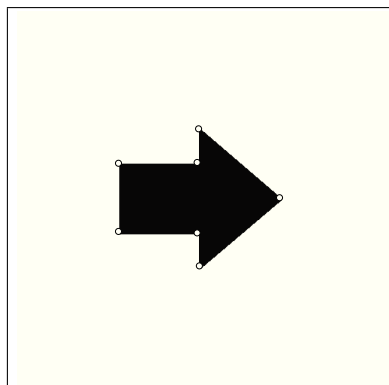


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

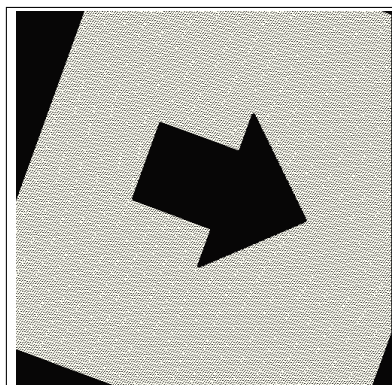
Obrázek 3.11: Hladké význačné body - kombinace,  $\alpha = 0$ .



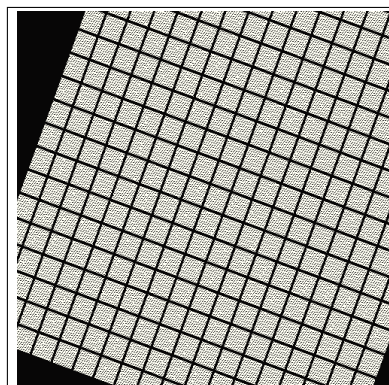
(a) Obraz  $R$ .



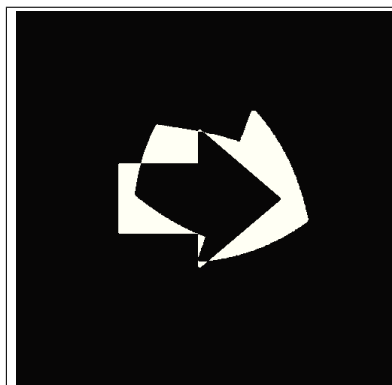
(b) Obraz  $T$ .



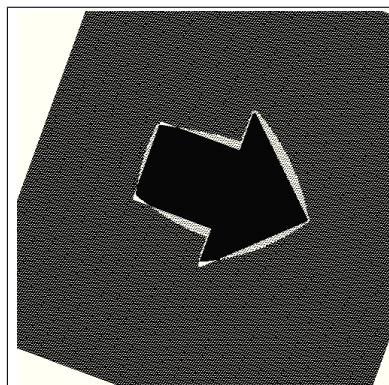
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

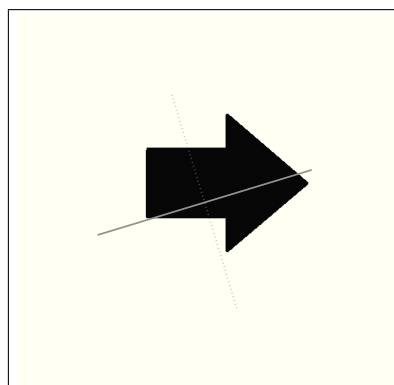


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

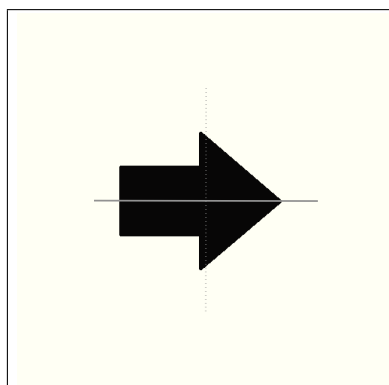


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

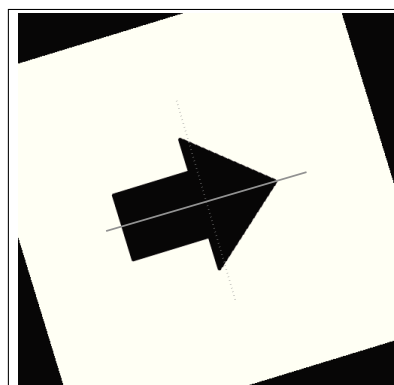
Obrázek 3.12: Hladké význačné body - kombinace,  $\alpha = 10^4$ .



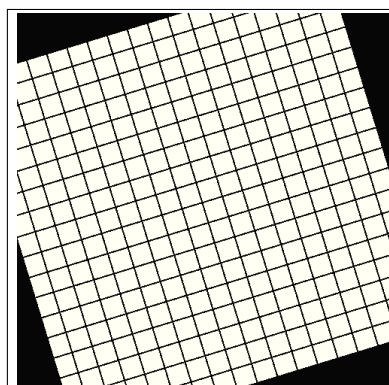
(a) Obraz  $R$ .



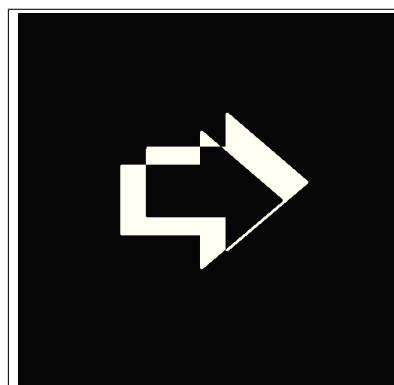
(b) Obraz  $T$ .



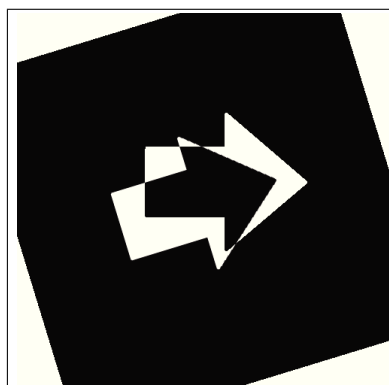
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.



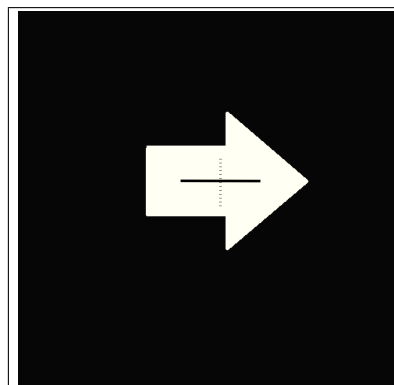
(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .



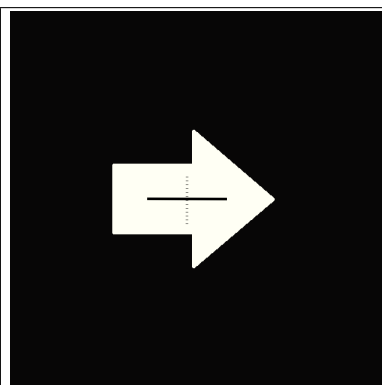
(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

Obrázek 3.13: Hlavní osy - posun, původní intenzita šedi.

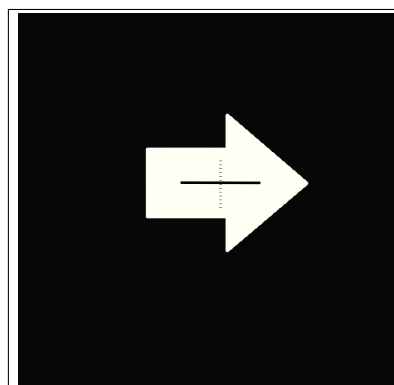




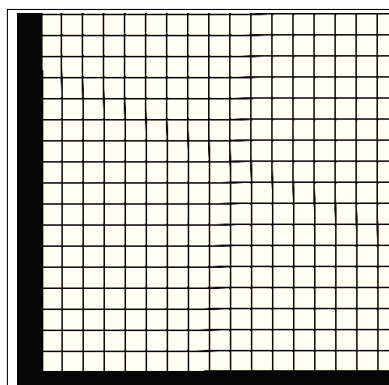
(a) Obraz  $R$ .



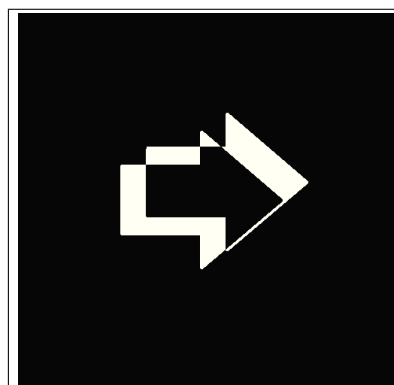
(b) Obraz  $T$ .



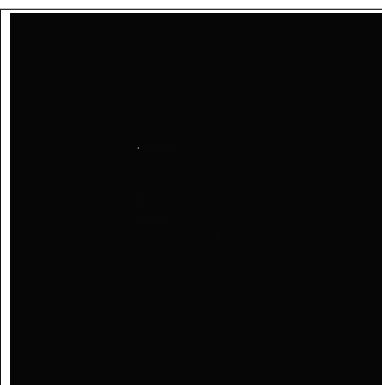
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

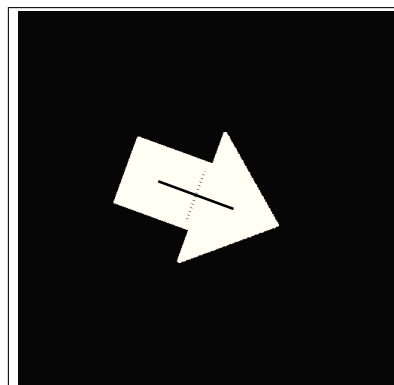


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

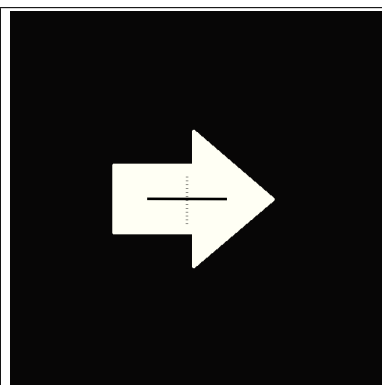


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

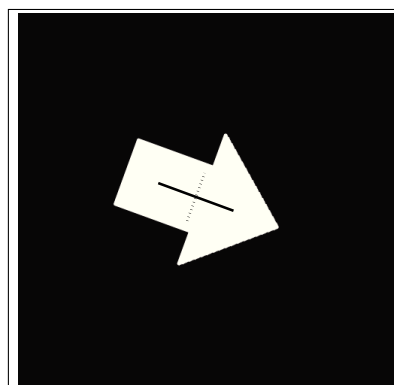
Obrázek 3.14: Hlavní osy - posun.



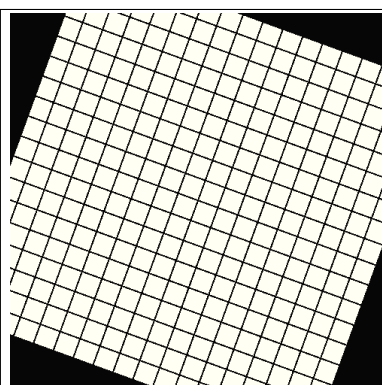
(a) Obraz  $R$ .



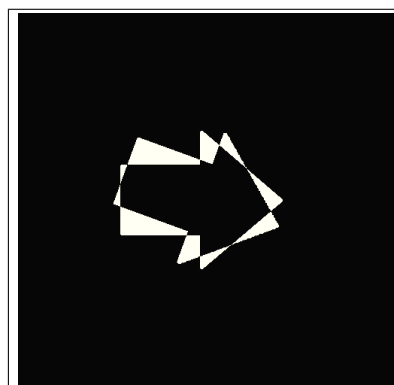
(b) Obraz  $T$ .



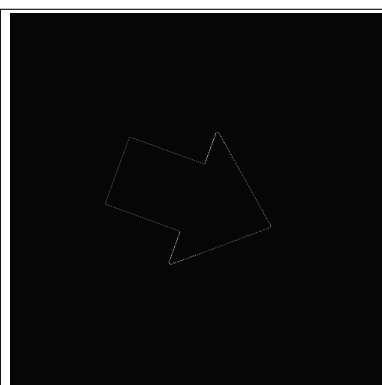
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

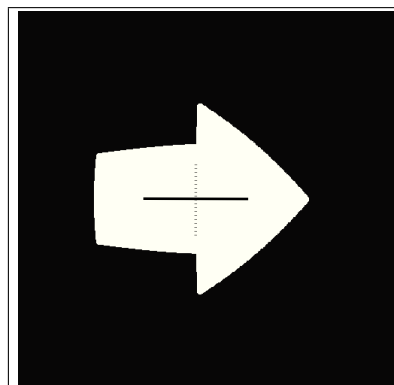


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

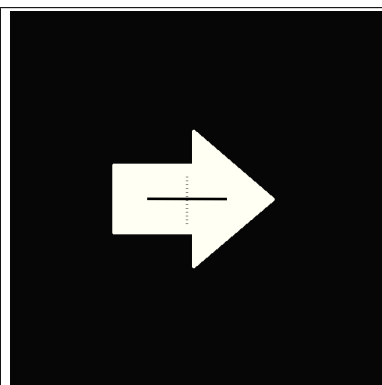


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

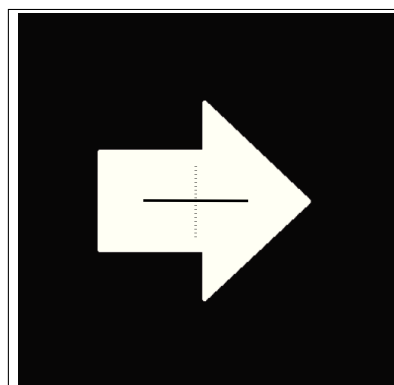
Obrázek 3.15: Hlavní osy - rotace.



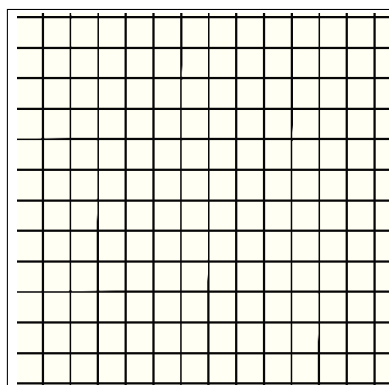
(a) Obraz  $R$ .



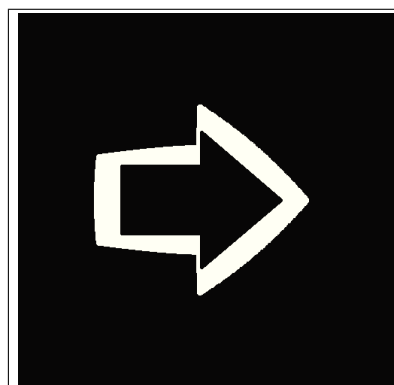
(b) Obraz  $T$ .



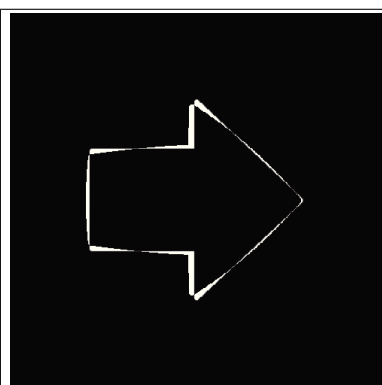
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

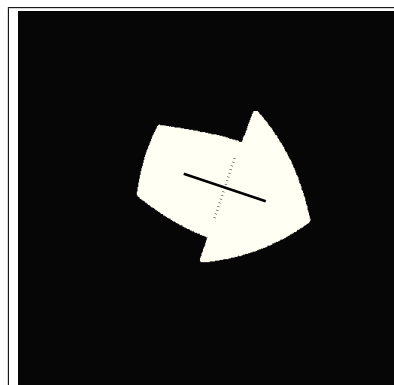


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

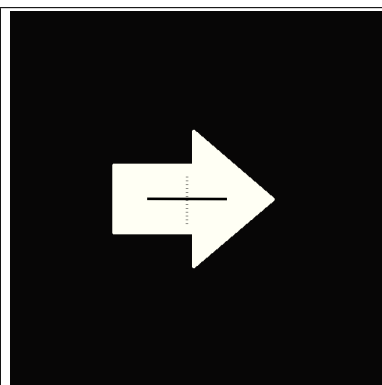


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

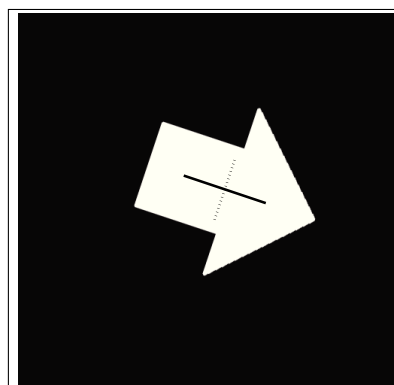
Obrázek 3.16: Hlavní osy - „rybí oko“.



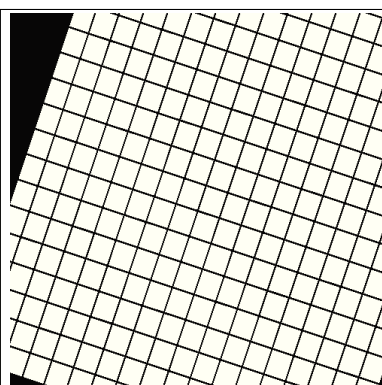
(a) Obraz  $R$ .



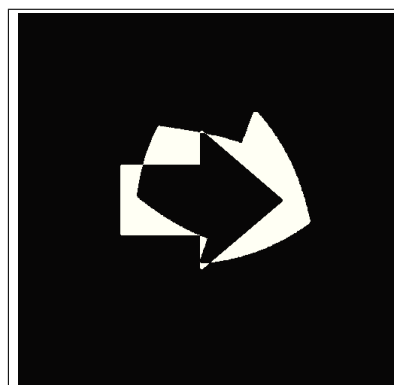
(b) Obraz  $T$ .



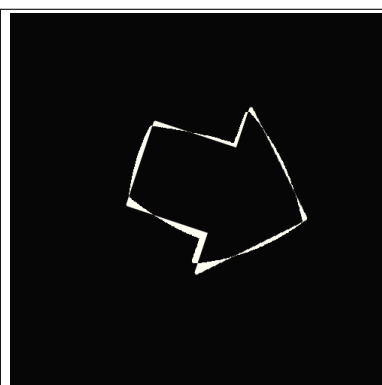
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

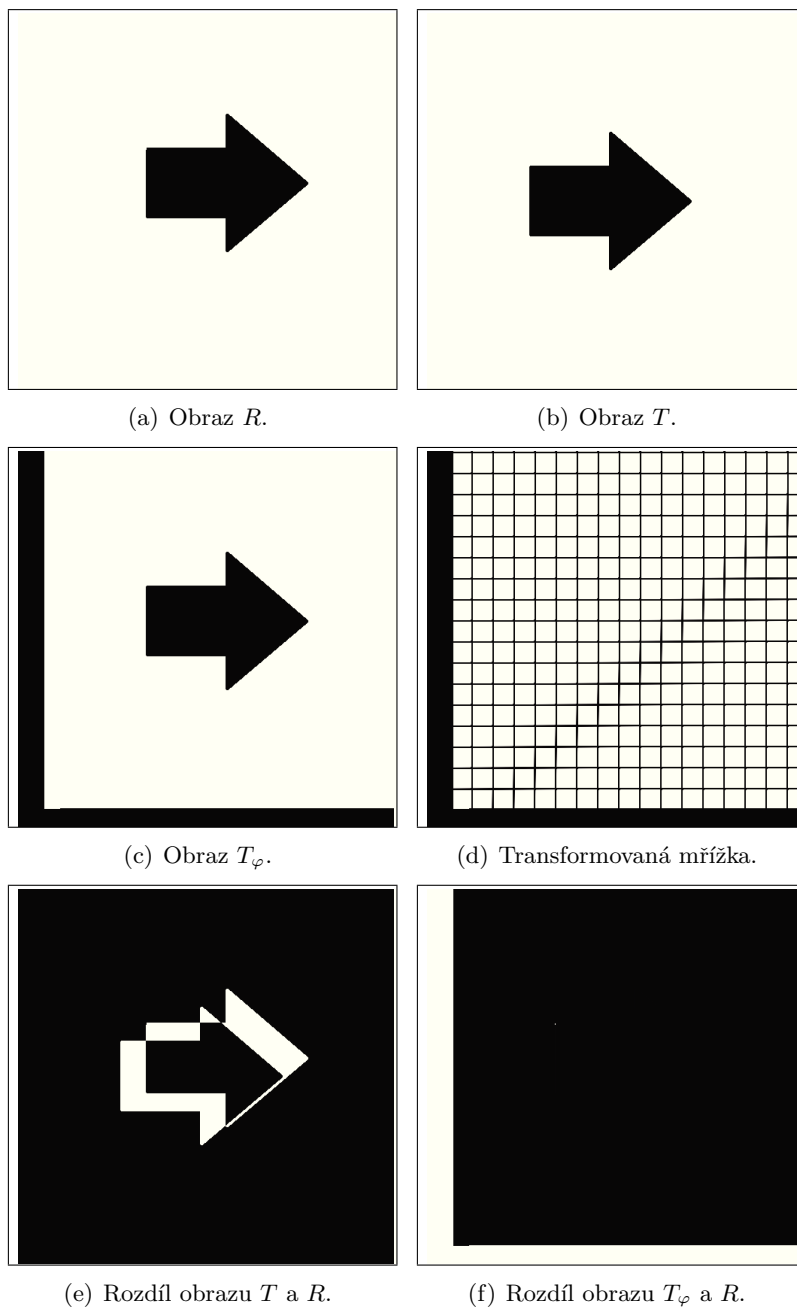


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

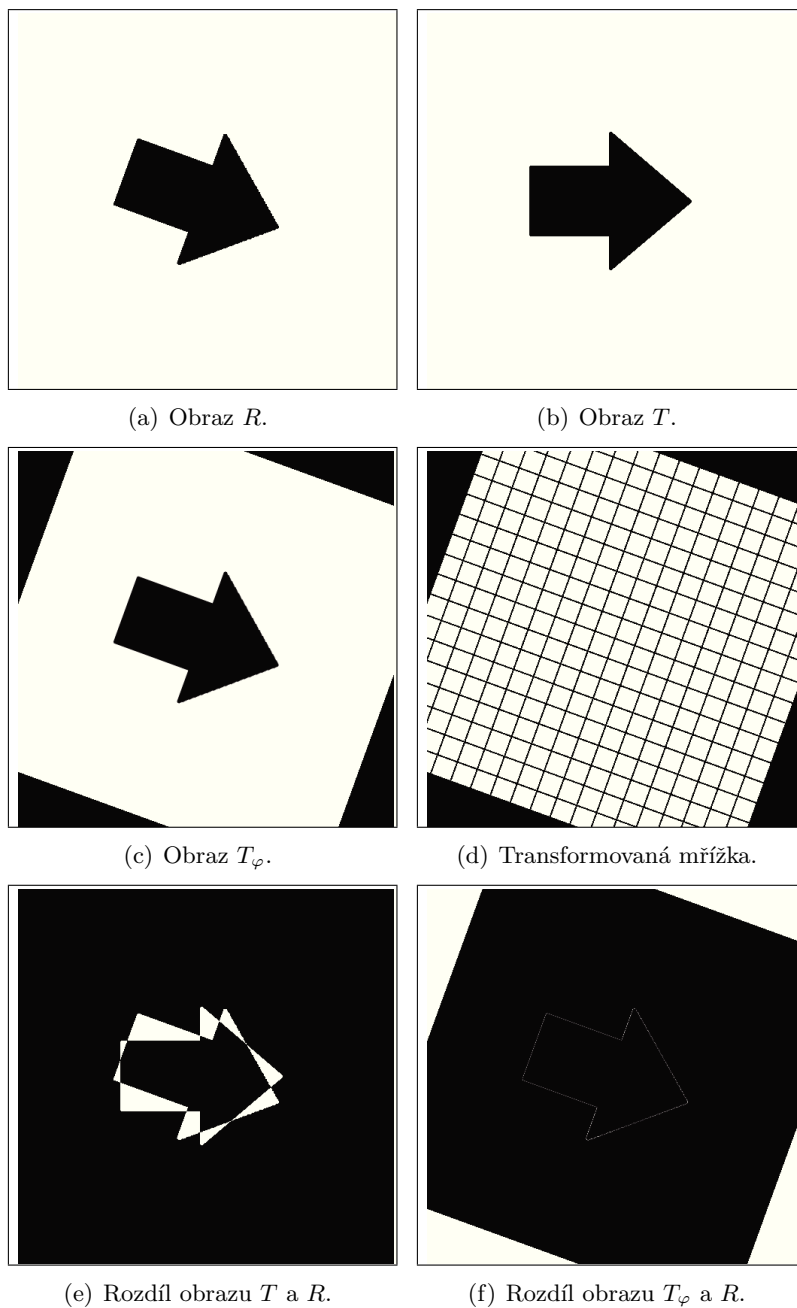


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

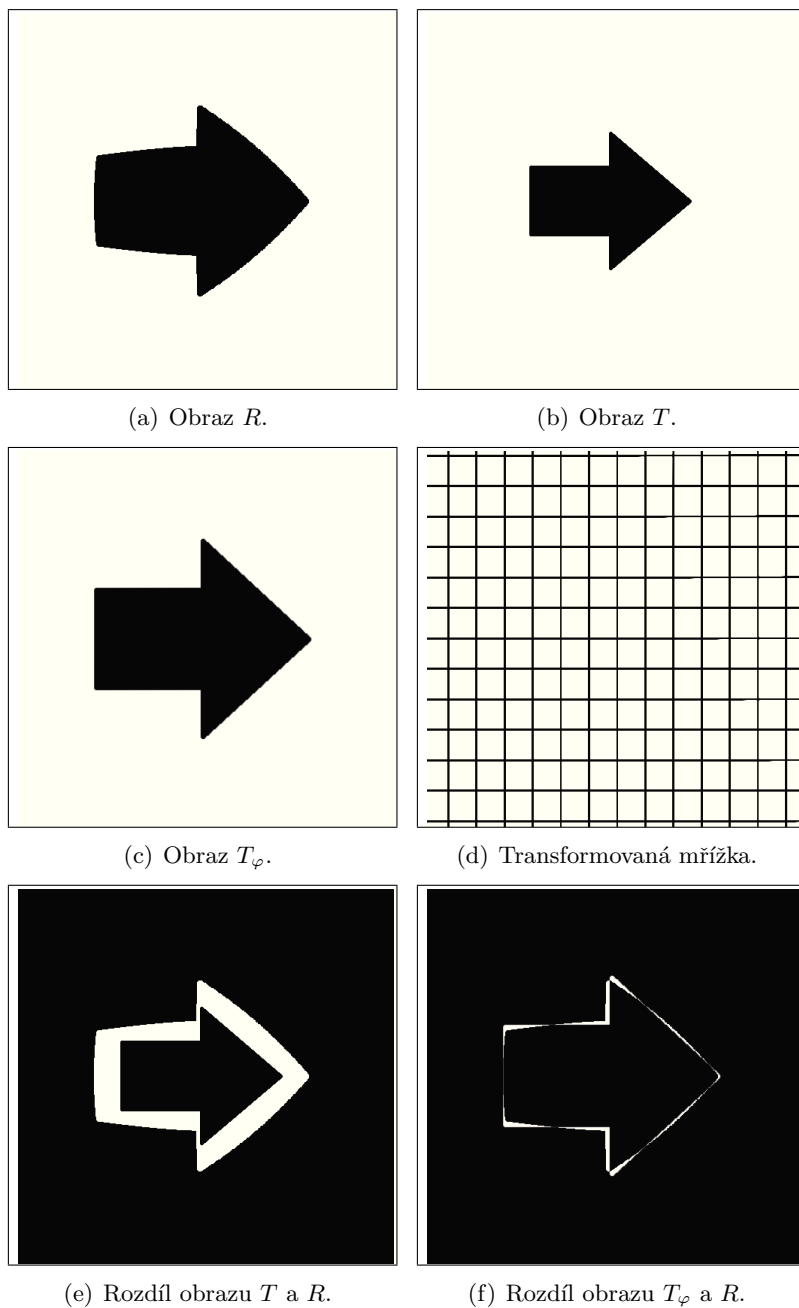
Obrázek 3.17: Hlavní osy - kombinace.



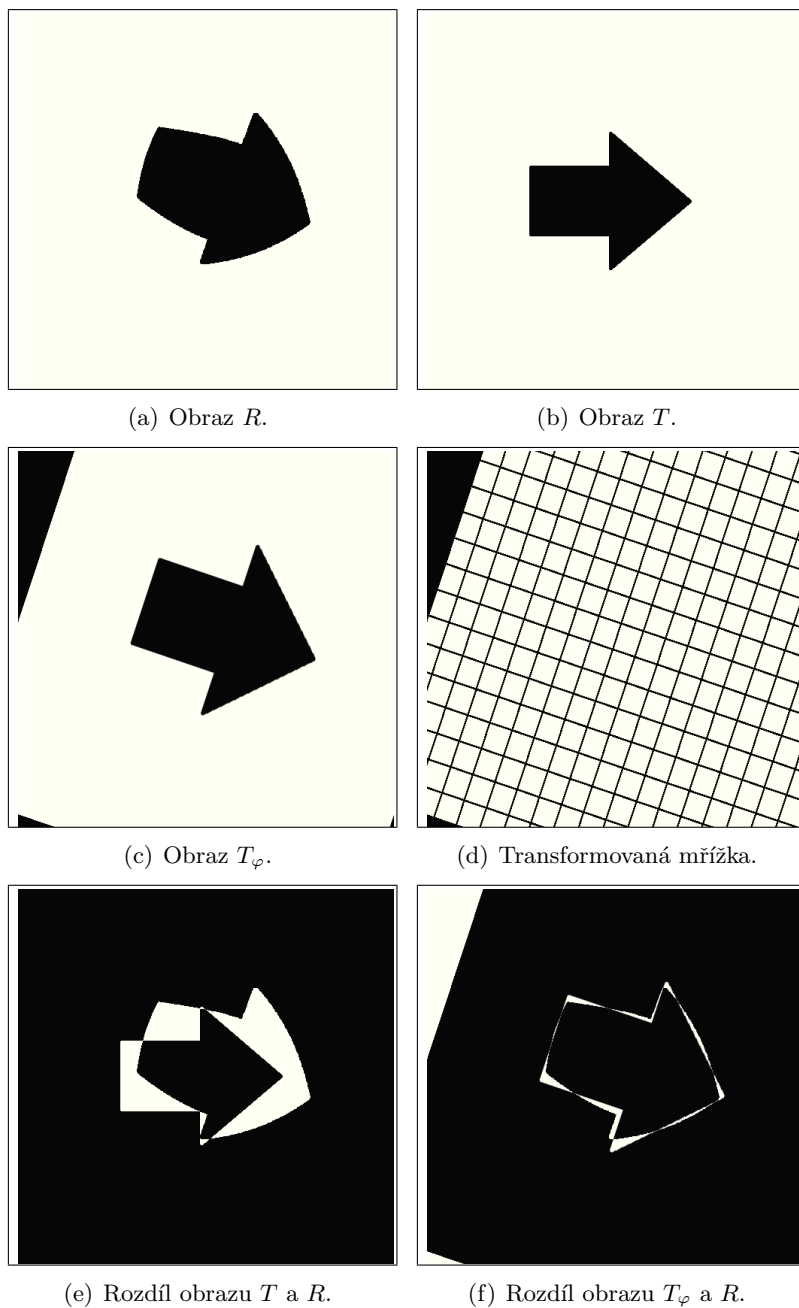
Obrázek 3.18: Optimální lineární registrace - posun.



Obrázek 3.19: Optimální lineární registrace - rotace.



Obrázek 3.20: Optimální lineární registrace - „rybí oko“.



Obrázek 3.21: Optimální lineární registrace - kombinace.



## 4 Elastická registrace

Elastická registrace patří mezi tzv. neparametrické metody registrace. Ty oproti parametrickému přístupu nepotřebují volit nepřirozené bázové funkce nebo hledat význačné body, což může být obtížné a také vyžaduje další znalosti. Základní myšlenkou neparametrických metod je přijít s mírou vhodnou jak pro podobnost obrazů, tak i pro věrohodnost neparametrické transformace.

Jak již bylo řečeno, hledáme transformaci  $\varphi$  pro cílový obraz  $R$  a transformovaný obraz  $T$  tak, aby obraz  $T_\varphi = T(\varphi(x))$  byl v jistém smyslu podobný obrazu  $R$ . Transformaci  $\varphi$  rozdělíme na triviální identickou část a tzv. deformaci nebo posunutí  $u, u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tzn.

$$\varphi(x) = x - u(x).$$

Nejintuitivnější způsob přístupu k problému registrace je navrhnout vhodnou míru vzdálenosti  $\mathcal{D}$  a minimalizovat vzdálenost mezi  $R$  a  $T_u$  vzhledem k  $u$ ,

$$\mathcal{D}[R, T; u] := \mathcal{D}[R, T_u] \xrightarrow{u} \min,$$

kde s cílem zachovat jednoduchou notaci zavádíme

$$T_u(x) := T(x - u(x)).$$

Za míru vzdálenosti zvolíme  $\mathcal{D}$  již zavedenou v kapitole 3.4.1.

$$\mathcal{D}[R, T; u] := \frac{1}{2} \|T_u - R\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Ale přímá minimalizace míry vzdálenosti má své nevýhody: problém je špatně podmíněn, protože malé změny vstupních dat mohou vést k velkým změnám na výstupu, řešení není jediné, protože problém není konvexní, a deformace ani nemusí být spojitá. Tedy není možné sestojit vhodný postup pro numerické řešení.

Navíc v mnoha aplikacích mohou vyplynout další předpoklady na transformaci. Například jestliže při registraci nedochází k žádným trhlinám a skladům tkáně, je transformace diffeomorfní (vzájemně jednoznačná, spolu se svou inverzí jsou spojitě a mají spojitě i derivace do  $k$ -tého řádu, pro  $k \geq 1$ ).

Obě situace lze vyřešit přidáním regularizace nebo zhlazovače („smoother“)  $\mathcal{S}$ . Problém registrace pak formulujeme

**Problém 4.1** *Budiž dány dva obrazy  $R, T$  a pozitivní regularizační parametr  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , hledáme posunutí  $u$  tak, aby*

$$\mathcal{J}[u] = \min_{v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2} \mathcal{J}[v], \text{ kde } \mathcal{J}[v] := \mathcal{D}[R, T; v] + \alpha \mathcal{S}[v].$$

Takto regularizovaný problém je výchozím bodem pro stabilní numerické řešení. Výběr zhlazovače závisí na konkrétní aplikaci, v mnoha aplikacích nejsou požadované vlastnosti

transformace známy předem a proto existují různé techniky zhlazení. Zde využijeme, na základě fyzikální motivace, tzv. linearizovaný elastický potenciál

$$\mathcal{S}[u] := \mathcal{P}[u] = \int_{\Omega} \frac{\mu}{4} \sum_{j,k=1}^2 (\partial_{x_j} u_k + \partial_{x_k} u_j)^2 + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} u)^2 dx,$$

kde  $\lambda$  a  $\mu$  značí tzv. Lamého konstanty. Pro tento konkrétní výběr regularizátoru, Euler-Lagrangeho rovnice nejsou nic víc než Navier-Lamého rovnice:

$$-f = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u. \quad (4.1)$$

Problém minimalizace 4.1 byl formulován bez okrajových podmínek na minimalizaci  $u$ . Dle experimentů v [2] jsou-li obrazy na jednotném pozadí, nejsou okrajové podmínky příliš důležité. Tak můžeme použít vhodné okrajové podmínky k získání efektivního numerického řešení.

V následující kapitole uvádíme fyzickou motivaci, z které vyplývá užití konkrétního zhlazovače. Obrazy jsou tak považovány za dvě různá pozorování pružného tělesa, jeden před a jeden po deformaci. Posunutí pružného tělesa je odvozeno pomocí modelu lineární pružnosti. Dále jsou pro zavedení okrajových podmínek vypočteny vlastní funkce a vlastní čísla Navier-Lamého operátoru. Ukážeme, jak lze Navier-Lamého rovnice odvodit z elastického potenciálu, což také poskytuje slabou formulaci Navier-Lamého rovnic.

Na základě diskretizace můžeme odvodit aproximaci rovnice (4.1) pomocí konečných diferencí. Poté za použití rychlé Fourierovy transformace (FFT) diagonalizujeme danou matici a provedeme pseudoinverzi.

## 4.1 Fyzikální motivace

Tato kapitola poskytuje přehled fyzikálních vlastností pružného tělesa. Podstatný rozdíl mezi tuhým a elastickým tělesem je, že spojení částic již není pevné, ale může se měnit s ohledem na elastické vlastnosti tělesa. Působením vnějších sil tak dochází k deformaci tělesa. Deformace je spojena s napětím tělesa a tvar tělesa vychází z rovnováhy vnějších sil a vnitřního napětí. Nepůsobí-li na elastické těleso žádné vnější síly, vrátí se do původního tvaru. Předpokládáme, že těleso je homogenní, tj. má stejné mechanické vlastnosti v každém bodě a izotropní, tj. má stejné mechanické vlastnosti ve všech směrech. Více o mechanice kontinua lze nalézt v [6].

### 4.1.1 Tenzor deformací

Deformace lze popsat srovnáním deformovaného a nedeformovaného stavu tělesa. Před deformací, v čase  $t = 0$ , můžeme popsat polohu částic jako  $y_j = y_j(x_i, 0) = x_j$ . Po deformaci, v čase  $t_D$ , pak bude poloha odpovídajících částic určena jako  $y_j = y_j(x_i, t_D)$ . Definujeme vektor posunutí  $u_i$  jako

$$u_i = y_i - x_i.$$

Pomocí vektoru posunutí je možné deformaci popsat jako

$$y_j = x_j + u_j(x_i).$$

Tento vztah však v sobě zahrnuje nejen deformaci, ale také posunutí a otáčení tělesa jako celku. Abychom z rovnic izolovali deformační část, je vhodné spočítat

$$dy_j dy_j = (dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l)(dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_k) = (\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l})(\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}) dx_l dx_k,$$

kde  $\delta$  značí Kroneckerovo delta, neboli

$$dy_j dy_j - dx_j dx_j = 2\epsilon_{lk} dx_l dx_k,$$

kde

$$\epsilon_{lk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$$

je tenzor velkých deformací.

Pokud jsou deformace malé, nabývají malých hodnot i parciální derivace a součin parciálních derivací lze zanedbat. V takovém případě lze deformaci popsat tzv. tenzorem malých deformací

$$\epsilon_{lk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right),$$

$$V(x, t) := (\epsilon_{l,k})_{l,k=1,2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Pro malé deformace jsou velikosti posunů  $dx_i$  v nedeformovaném stavu a jim odpovídající  $dy_j$  v deformovaném stavu přibližně stejné a není tedy nutno rozlišovat mezi tenzory malých deformací v nedeformovaném a deformovaném stavu.

Diagonální složky tenzoru malých deformací značí relativní změnu délky elementu, který byl původně rovnoběžný s danou osou

$$\epsilon_{jj} = \frac{l_{x_j} - l_{0x_j}}{l_{0x_j}} \text{ pro } j = 1, 2,$$

kde  $l_{0x_j}$  je délka před deformací a  $l_{x_j}$  je délka po deformaci. Smíšené složky tenzoru malých deformací

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

odpovídá polovině úhlu  $\alpha_1 + \alpha_2$ , o který se při deformaci změní pravý úhel mezi elementy původně rovnoběžnými s kartézskými osami  $x_1$  a  $x_2$ . Úhel  $\alpha_1 + \alpha_2$  se nazývá úhel smyku.

#### 4.1.2 Tenzor napětí

Na těleso působí dva druhy sil, objemové síly  $f$ , které působí na každý objemový element, a plošné síly, které vznikají na povrchu a dále se přenášejí po nejbližších částicích (molekulách) tělesa. Výslednici objemových sil působících na těleso můžeme napsat ve tvaru

$$R_V = \int_V f \, dV,$$

kde  $f$  označuje objemovou sílu vztaženou na jednotku objemu, a výslednici plošných sil ve tvaru

$$R_S = \int_S t \, dS,$$

kde  $t$  označuje plošnou sílu vztaženou na jednotku plochy.

Jestliže na těleso začnou působit vnější síly, dojde k deformaci a vzniku napětí. Nakonec se vnější síly a vnitřní napětí vyrovnají, těleso je pak v rovnovážném stavu a pro libovolný element platí rovnice rovnováhy:

$$\begin{aligned} \int_V f \, dV + \int_S t \, dS &= 0, \\ \int_V x \times f \, dV + \int_S x \times t \, dS &= 0. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že pro uvažované pružné těleso existují funkce  $\sigma_{j,k} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $j, k = 1, 2$  tak, že

$$\int_S t_j \, dS = \int_S \sum_{k=1}^2 \sigma_{j,k} n_k \, dS =: \int_S \langle \sigma_{j,:}, \vec{n} \rangle \, dS,$$

kde  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  označuje vnější normálu na plochu  $S$ . Pomocí Gaussovy věty převedeme plošný integrál na objemový

$$\int_S t_j \, dS = \int_V \operatorname{div} \sigma_{j,:} \, dV, j = 1, 2.$$

Funkce  $\sigma_{j,k}$  tvoří tzv. tenzor napětí  $\Sigma$

$$\Sigma(x, t) := (\sigma_{j,k})_{j,k=1,2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Z fyzikálních úvah vyplývá, že tenzor napětí je symetrický, tj.  $\Sigma = \Sigma^\top$ . Pomocí rovnice rovnováhy a variací přes všechny možné části tělesa, dostaneme Newtonův první zákon, Zákon setrvačnosti,

$$f = -\operatorname{div} \Sigma.$$

#### 4.1.3 Hookeův zákon

V elasticitě je napětí propojeno s deformací pomocí Hookeova zákona, který vyjadřuje souvislost deformace a napětí. Použijeme lineární model a uvažujeme, že bez poměrného prodloužení tělesa není napětí.

Značné zjednodušení nastane u izotropního pružného tělesa. Hlavní osy (osy, vzhledem ke kterým jsou složky tenzoru se smíšenými indexy nulové) se totiž v tomto případě pro deformaci a napětí shodují. Pak můžeme tenzory deformace a napětí současně diagonálně seřadit. Použitím soustavy vlastních vektorů jako referenčního souřadnicového systému

a označením vlastních hodnot  $V$  a  $\Sigma$  za  $\varepsilon_j$  a  $\sigma_j$  pro  $j = 1, 2$ , tenzory deformace a napětí jsou vzhledem k tomuto systému souřadnic dány

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix},$$

Získáme lineární model

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Navíc, jelikož reakce izotropního tělesa je nezávislá na směru, platí že  $b_1 := b_{1,1} = b_{2,2}$  a  $b_2 := b_{1,2} = b_{2,1}$ . K popisu vlastností elastického izotropního tělesa nám tedy stačí dva parametry. Tyto dva parametry vyjadřují vlastnosti materiálu a jsou to Youngův modul pružnosti  $E$ , který představuje podíl napětí a relativního prodloužení, a Poissonovo číslo  $\nu$ , které představuje poměr relativního příčného zúžení tyče k jejímu relativnímu prodloužení při namáhání tahem. Jejich zavedením dostaneme  $b_1 = E^{-1}$  a  $b_2 = -\nu E^{-1}$ .

Nyní prepíšeme vztah mezi deformací a napětím pomocí těchto materiálových konstant,

$$E\varepsilon_j = (1 + \nu)\sigma_j - \nu \sum_{l=1}^2 \sigma_l, \quad j = 1, 2,$$

a pro tenzory deformace a napětí v hlavních osách máme

$$E\hat{V} = (1 + \nu)\hat{\Sigma} - \nu \operatorname{tr}(\hat{\Sigma})I_2.$$

Vrátíme-li se k počátečním souřadnicím, získáme

$$\begin{aligned} EV &= (1 + \nu)\Sigma - \nu \operatorname{tr}(\Sigma)I_2, \\ E \operatorname{tr}(V) &= (1 - \nu) \operatorname{tr}(\Sigma), \\ (1 + \nu)\Sigma &= EV + \frac{E\nu}{1 - \nu} \operatorname{tr}(V)I_2. \end{aligned}$$

Dosazením Lamého konstant

$$\mu := \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \nu}, \quad \lambda := \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - \nu)}$$

můžeme vyjádřit napětí pomocí deformace vzhledem k obecným souřadnicím,

$$\begin{aligned} \sigma_{j,k} &= 2\mu\varepsilon_{j,k} + \lambda \operatorname{tr}(V)\delta_{j,k} \\ &= \mu(\partial_{x_j}u_k + \partial_{x_k}u_j) + \lambda \operatorname{div} u \delta_{j,k}. \end{aligned}$$

Jednoduchými výpočty dostaneme

$$\operatorname{div} \sigma_{j,:} = \sum_{k=j}^2 \partial_{x_k} \sigma_{j,k} = \mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \partial_{x_j} \operatorname{div} u_j.$$

Shrneme-li tyto výpočty získáme známé Navier-Lamého rovnice

$$-f = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u.$$

## 4.2 Vlastní funkce Navier-Lamého operátoru

Pro konkrétní okrajové podmínky, jsou vlastní funkce Navier-Lamého operátoru známy explicitně. Tato znalost může sloužit jako základ pro numerické řešení systému Navier-Lamého rovnic. Rozvojem posunutí a síly pomocí normalizovaných vlastních funkcí  $v_j$ ,

$$u = \sum_{j=1}^M \alpha_j v_j \text{ a } f = \sum_{j=1}^M \beta_j v_j,$$

dostaneme

$$\mathcal{A}u = \sum_{j=1}^M \alpha_j \mathcal{A}v_j = \sum_{j=1}^M \alpha_j \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^M \beta_j v_j = f.$$

Pro řešení  $u$  platí, že  $\alpha_j = 0$ , pokud  $\lambda_j = 0$ , jinak  $\alpha_j = \beta_j / \lambda_j$ . Předpokládáme, že systém je konzistentní, tedy že má alespoň jedno řešení. Přesto má tento přístup dvě nevýhody. Při numerické implementaci musí být délka rozvoje  $M$  konečná a je třeba numericky vypočítat koeficienty  $\beta_j = \langle f, v_j \rangle$ .

Nyní vyjádříme explicitní rovnice pro vlastní čísla a vlastní funkce Navier-Lamého operátoru  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A}[u] := \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u,$$

tj. hledáme funkci  $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a konstantu  $\kappa$ , splňující

$$\mathcal{A}[v] = \kappa v.$$

V další části stanovíme explicitní okrajové podmínky druhého řádu. Tyto okrajové podmínky mají za následek změnu parciálního diferenciálního operátoru. Pro další užití definujeme periodické okrajové podmínky, pro které je oblast  $\Omega$  mapována na torus

$$\begin{aligned} u_1(0, x_2) &= u_1(1, x_2), \\ u_2(x_1, 0) &= u_2(x_1, 1). \end{aligned}$$

**Věta 4.1** *Necht'  $i, j \in \mathbb{N}_0, i^2 + j^2 \neq 0$ , a  $r, s = 0, 1$ . Potom*

$$\begin{aligned} v_{1;i,j}^{r,s} &:= \begin{pmatrix} -i \sin(i\pi x_1 + r\pi/2) \sin(j\pi x_2 + s\pi/2) \\ j \cos(i\pi x_1 + r\pi/2) \cos(j\pi x_2 + s\pi/2) \end{pmatrix}, \\ v_{2;i,j}^{r,s} &:= \begin{pmatrix} j \sin(i\pi x_1 + r\pi/2) \sin(j\pi x_2 + s\pi/2) \\ -i \cos(i\pi x_1 + r\pi/2) \cos(j\pi x_2 + s\pi/2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

*jsou vlastní funkce operátoru  $\mathcal{A}$  a*

$$\kappa_{1;i,j} = -\pi^2(2\mu + \lambda)(i^2 + j^2), \quad \kappa_{2;i,j} = -\pi^2\mu(i^2 + j^2),$$

*jsou odpovídající vlastní čísla vzhledem k periodickým okrajovým podmínkám.*

### 4.3 Variační formulace problému pružnosti

Nyní odvodíme variační formulaci problému pružnosti. Požadované posunutí je charakterizováno jako minimalizace energetického funkcionálu  $\mathcal{J}$ . Funkcionál se skládá ze dvou částí. První  $a[u, u]$  je bilineární forma a slouží jako regularizátor, modeluje materiálové vlastnosti a vnitřní síly, a druhý člen  $b[u]$  odráží vnější síly.

Necht'  $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$  a  $V[u] = (\varepsilon_{j,k}[u])_{j,k} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  je tenzor deformací s  $\varepsilon_{j,k}[u] = \frac{1}{2}(\partial_{x_j} u_k + \partial_{x_k} u_j)$ . Využijeme pozitivní semidefinitivní bilineární formy

$$\begin{aligned} a[u, v] &:= \int_{\Omega} 2\mu \operatorname{tr}(V[u]^{\top} V[v]) + \lambda \operatorname{tr}(V[u]) \operatorname{tr}(V[v]) dx \\ &= \int_{\Omega} 2\mu \sum_{j,k=1}^2 \varepsilon_{j,k}[u] \varepsilon_{j,k}[v] + \lambda \operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v \, dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \sum_{j,k=1}^2 (\partial_{x_j} u_k + \partial_{x_k} u_j)(\partial_{x_j} v_k + \partial_{x_k} v_j) + \lambda \operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v \, dx \\ &= \int_{\Omega} \mu \sum_{k=1}^2 \langle \nabla u_k + \partial_{x_k} u, \nabla v_k \rangle_{\mathbb{R}^2} + \lambda \operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v \, dx \end{aligned} \tag{4.2}$$

a lineární formy

$$b[v] := \int_{\Omega} \langle f, v \rangle_{\mathbb{R}^2} \, dx. \tag{4.3}$$

Minimum funkcionálu  $\mathcal{J}$ ,

$$\mathcal{J}[u] := \frac{1}{2} a[u, u] + b[u], \tag{4.4}$$

je s periodickými okrajovými podmínkami pro  $u$  charakterizováno  $d\mathcal{J}[u; v] = 0$  pro všechna vhodná  $v$ .

Následující věta může být formulována pro méně hladké funkce  $u$  a také  $v$ . Nicméně, jelikož chceme řešit výsledné parciální diferenciální rovnice pomocí konečných diferencí, vyžadujeme dané podmínky na hladkost.

**Věta 4.2** *Necht' je funkcionál  $\mathcal{J}$  definován rovnicí (4.4), a je definováno rovnicí (4.2) a  $b$  je definováno rovnicí (4.3). Navíc necht'  $u \in (C^2(\mathbb{R}^2))^2$ . Pro perturbace  $v \in (C^2(\mathbb{R}^2))^2$  je dána Gâteauxova derivace  $\mathcal{J}$*

$$d\mathcal{J}[u; v] = \int_{\Omega} \langle f - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u, v \rangle_{\mathbb{R}^2} \, dx.$$

Věta 4.2 poskytuje slabou formulaci Navier-Lamého rovnice (4.1). Nicméně v registraci obrazu, kde se většinou zajímáme o velmi hladké deformace, slabá formulace problému neposkytuje žádné zvláštní výhody ve srovnání se silnou formulací.

S touto konkrétní bilineární formou můžeme vyjádřit potenciál pružnosti posunutí  $u$ .

**Definice 4.1** Necht'  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $u_j \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $j = 1, 2$ . Potenciál pružnosti  $\mathcal{P}$  posunutí  $u$  je definován jako

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[u] &:= \frac{1}{2}a[u, u] \\ &= \int_{\Omega} \mu \operatorname{tr}(V[u]^\top V[u]) + \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}(V[u])^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{\mu}{4} \sum_{j,k=1}^2 (\partial_{x_j} u_k + \partial_{x_k} u_j)^2 + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} u)^2 dx. \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\lambda}{2} (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2)^2 + \mu \left\{ (\partial_{x_1} u_1)^2 + (\partial_{x_2} u_2)^2 + \frac{1}{2} (\partial_{x_1} u_2 + \partial_{x_2} u_1)^2 \right\} dx\end{aligned}$$

#### 4.4 Postup řešení

Hledáme minimum funkcionálu problému 4.1, které splňuje Euler-Lagrangeho rovnici ve tvaru

$$\mathcal{A}[u](x) - f(x, u(x)) = 0, \quad \text{pro každé } x \in \Omega,$$

kde  $\Omega = (0, 1)^2$  je uvažovaná oblast. Parciální diferenciální operátor  $\mathcal{A}$  souvisí s zhlazovačem  $\mathcal{S}$  a síla  $f$  souvisí s mírou vzdálenosti  $\mathcal{D}$ .

Vhodným způsobem řešení této semilineární parciální diferenciální rovnice a překlenutí nelinearity je využití prostých iterací. Začneme s počátečním odhadem  $u^{(0)}$  (např.  $u^{(0)} \equiv 0$ ), implicitně definujeme  $u^{(k+1)}$

$$\mathcal{A}[u^{(k+1)}](x) = f(x, u^{(k)}(x)), \quad x \in \Omega, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (4.5)$$

Pro numerické řešení prostých iterací rovnice (4.5) je třeba řešit dva problémy v souvislosti s diskretizací: výpočet síly a numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic.

#### 4.5 Aproximace Navier–Lamého rovnic pomocí konečných diferencí

Vzhledem k jednoduchosti základní oblasti  $\Omega = (0, 1)^2$ , použijeme pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic metodu konečných diferencí.

Pro funkci  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  používáme zápis  $\vec{g} := g(\vec{X}) := (g(x_j))_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$  a pro vektorové pole  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , stanovíme  $\vec{v} := (v_1^\top, v_2^\top)^\top \in \mathbb{R}^{2N}$ . Z Taylorova rozvoje funkce  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dostaneme standardní aproximaci konečnými diferencemi pro druhé derivace,

$$\partial_{x_j^2} g(x) = \frac{g(x + he_j) - 2g(x) + g(x - he_j)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad j = 1, 2, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}\partial_{x_1 x_2} g(x) &= \frac{1}{4h^2} (g(x + he_1 + he_2) - g(x - he_1 + he_2) - \\ &\quad - g(x + he_1 - he_2) + g(x - he_1 - he_2)) + \mathcal{O}(2h^2),\end{aligned} \quad (4.7)$$

kde předpokládáme fixní velikost diskretizačního kroku  $h$  pro obě dimenze.



Předpokládáme, že aproximaci  $\mathcal{A}[u]$  pomocí konečných diferencí lze získat v každém bodě sítě  $x_j$  pomocí konvolučního filtru  $S^{\mathcal{A}}$ ,

$$\mathcal{A}[g](x_j) \approx \sum_{\kappa \in \mathcal{N}(j) \cup j} S_{\kappa}^{\mathcal{A}} g(x_{\kappa}) =: (S^{\mathcal{A}} * g)(x_j)$$

kde  $\mathcal{N}(j)$  označuje okolí bodu sítě  $j$  a  $S^{\mathcal{A}}$  označuje filtr související s parciálním diferenciálním operátorem  $\mathcal{A}$  prostřednictvím svých aproximací pomocí konečných diferencí. Periodické okrajové podmínky jsou začleněny do diskrétní formulace odpovídajícím kopírováním.

Pomocí lexikografického uspořádání (viz. definice 2.3), můžeme také odvodit matici reprezentující konvoluci s  $S^{\mathcal{A}}$ ,

$$A \cdot \vec{g} := (S^{\mathcal{A}} * g)(\vec{X}).$$

Pro Navier-Lamého rovnice máme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[u] &= \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) \partial_{x_1 x_1} u_1 + \mu \partial_{x_2 x_2} u_1 + (\lambda + \mu) \partial_{x_1 x_2} u_2 \\ (\lambda + \mu) \partial_{x_1 x_2} u_1 + \mu \partial_{x_1 x_1} u_2 + (\lambda + 2\mu) \partial_{x_2 x_2} u_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tedy s

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{1,1}[u_1] &:= (\lambda + 2\mu) \partial_{x_1 x_1} u_1 + \mu \partial_{x_2 x_2} u_1, \\ \mathcal{A}^{1,2}[u_2] &:= (\lambda + \mu) \partial_{x_1 x_2} u_2, \\ \mathcal{A}^{2,1}[u_1] &:= (\lambda + \mu) \partial_{x_1 x_2} u_1, \\ \mathcal{A}^{2,2}[u_2] &:= \mu \partial_{x_1 x_1} u_2 + (\lambda + 2\mu) \partial_{x_2 x_2} u_2, \end{aligned}$$

a použitím rovnic (4.6) a (4.7)

$$\left. \begin{aligned} S^{1,1} &:= (S^{2,2})^{\top} := \begin{pmatrix} 0 & (\lambda + 2\mu) & 0 \\ \mu & -2(\lambda + 3\mu) & \mu \\ 0 & (\lambda + 2\mu) & 0 \end{pmatrix}, \\ S^{1,2} &:= (S^{2,1})^{\top} := \frac{\lambda + \mu}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[u](X) &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{1,1}[u_1](X) + \mathcal{A}^{1,2}[u_2](X) \\ \mathcal{A}^{2,1}[u_1](X) + \mathcal{A}^{2,2}[u_2](X) \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} S^{1,1} * u_1(X) + S^{1,2} * u_2(X) \\ S^{2,1} * u_1(X) + S^{2,2} * u_2(X) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nebo

$$\mathcal{A}[u](\vec{X}) \approx \begin{pmatrix} A^{1,1}u_1(\vec{X}) + A^{1,2}u_2(\vec{X}) \\ A^{2,1}u_1(\vec{X}) + A^{2,2}u_2(\vec{X}) \end{pmatrix} := A\vec{u}.$$

Poznamenejme, že jiné okrajové podmínky vedou k jiným konvolučním schémátům.

Po diskretizaci parciálního diferenciálního operátoru  $\mathcal{A}$  dostaneme rozměrnou soustavu lineárních rovnic, jejíž matice je vysoce strukturovaná. Tato struktura nám umožňuje použitím techniky rychlé Fourierovy transformace získat inverzi matice a vyřešit tuto soustavu se složitostí  $\mathcal{O}(N \log N)$ , kde  $N$  je počet pixelů obrazu.

## 4.6 Diagonalizace strukturované matice

V této sekci si ukážeme, jak může být matice  $A$  rozdělena na bloky a pak diagonalizována rychlou Fourierovou transformací (FFT).

Pro následující rozklady budeme potřebovat základní cyklickou matici ( $C(n, 1) = C(i, i+1) = 1, i = 1, \dots, n$ )

$$C_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad (4.9)$$

(komplexní)  $n$ -tou odmocninu jedničky

$$\omega_n := e^{-2\pi i/n},$$

Fourierovu matici  $F_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$F_n := \frac{1}{\sqrt{n}} (\omega_n^{(j-1)(k-1)})_{j,k=1,\dots,n}, \quad (4.10)$$

matici

$$\Omega_n := \text{diag}(\omega_n^0, \dots, \omega_n^{n-1}), \quad (4.11)$$

a lemma o diagonalizaci cyklické matice pomocí Fourierovy matice

**Lemma 4.1** *Necht'  $n \in \mathbb{N}$  a  $\Omega_n$  a  $F_n$  jsou definovány rovnicí (4.11), resp. (4.10).*

- *Fourierova matice je unitární,  $F_n^{-1} = F_n^H$ .*
- *Cyklická matice  $C_n$  (viz. rovnice (4.9)) je diagonalizována maticí  $F_n$ ,  $F_n^H C_n F_n = \Omega_n$ .*
- *Libovolná cyklická matice  $Z_n = \sum_{j=-n}^n \alpha_j C_n^j$  je diagonalizována maticí  $F_n$ ,*

$$F_n^H Z_n F_n = \sum_{j=-n}^n \alpha_j (\Omega_n)^j.$$

Pro připomenutí uvedeme i definici Kroneckerova součinu dvou matic  $A$  a  $B$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \cdots & a_{m,n}B \end{pmatrix}.$$

Necht' matice  $A \in \mathbb{R}^{(2n_1n_2) \times (2n_1n_2)}$  je dva krát dva bloková matice s blokovými maticemi  $A^{p,q}$

$$A = \begin{pmatrix} A^{1,1} & A^{1,2} \\ A^{2,1} & A^{2,2} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

kde jsou cyklické bloky  $A^{p,q} \in \mathbb{R}^{(n_1n_2) \times (n_1n_2)}$  pro  $p, q = 1, 2$  definovány jako

$$\begin{aligned} A^{p,q} &= C_{n_2}^{-1} \otimes A_3^{p,q} + I_{n_2} \otimes A_2^{p,q} + C_{n_2} \otimes A_1^{p,q} \\ &= \begin{pmatrix} A_2^{p,q} & A_1^{p,q} & A_3^{p,q} \\ A_3^{p,q} & \ddots & \ddots \\ & \ddots & A_2^{p,q} & A_1^{p,q} \\ A_1^{p,q} & & A_3^{p,q} & A_2^{p,q} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

s cyklickými bloky  $A_s^{p,q} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  pro  $s = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} A_s^{p,q} &= S_{3,s}^{p,q} C_{n_1}^{-1} + S_{2,s}^{p,q} I_{n_1} + S_{1,s}^{p,q} C_{n_1} \\ &= \begin{pmatrix} S_{2,s}^{p,q} & S_{1,s}^{p,q} & S_{3,s}^{p,q} \\ S_{3,s}^{p,q} & \ddots & \ddots \\ & \ddots & S_{2,s}^{p,q} & S_{1,s}^{p,q} \\ S_{1,s}^{p,q} & & S_{3,s}^{p,q} & S_{2,s}^{p,q} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

kde  $S^{p,q} = (S_{t,s}^{p,q})_{t,s=1,2,3}$  (viz. (4.8)).

**Lemma 4.2** *Necht'  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $p, q = 1, 2$ .*

1. *Matice  $A_s^{p,q}$  (viz. rovnice (4.14)) jsou diagonalizovány maticí  $F_{n_1}$*

$$\begin{aligned} D_s^{p,q} &:= F_{n_1}^H A_s^{p,q} F_{n_1}, \\ D_s^{p,q} &= \text{diag}(D_{s;j}^{p,q}, j = 1, \dots, n_1), \\ \text{kde } D_{s;j}^{p,q} &= S_{3,s}^{p,q} \bar{\omega}_{n_1}^{j-1} + S_{2,s}^{p,q} + S_{1,s}^{p,q} \omega_{n_1}^{j-1}. \end{aligned}$$

2. *Matice  $A^{p,q}$  (viz. rovnice (4.13)) jsou diagonalizovány maticí  $F_{n_2} \otimes F_{n_1}$*

$$\begin{aligned}
D^{p,q} &:= (F_{n_2} \otimes F_{n_1})^H A^{p,q} (F_{n_2} \otimes F_{n_1}), \\
D^{p,q} &= \text{diag} \left( D_{k,j}^{p,q}, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, n_1, \\ k = 1, \dots, n_2, \end{matrix} \right), \\
\text{kde } D_{k,j}^{p,q} &= D_{2;j}^{p,q} + \bar{\omega}_{n_2}^{k-1} D_{3;j}^{p,q} + \omega_{n_2}^{k-1} D_{1;j}^{p,q}.
\end{aligned}$$

3. Pro matici  $A$  (viz. rovnice (4.12)) dostaneme

$$F^H A F = \begin{pmatrix} D^{1,1} & D^{1,2} \\ D^{2,1} & D^{2,2} \end{pmatrix}$$

kde  $F = I_2 \otimes F_{n_2} \otimes F_{n_1}$ .

#### 4.6.1 Inverze strukturované matice

Nyní bude naším cílem invertovat  $F^H A F$ . Potíž je v tom, že matice  $A$  může být singulární (a pro danou volbu matic  $S^{p,q}$  je), proto vypočteme tzv. pseudoinverzi. Začneme s definicí pseudoinverzní matice  $B^\dagger$  dva krát dva matice  $B$ .

**Lemma 4.3** Pro symetrickou matici  $B = \begin{pmatrix} b^1 & b^2 \\ b^2 & b^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  je dána pseudoinverze  $B^\dagger$

$$B^\dagger = \begin{cases} B^{-1}, & \text{pro } \det(B) \neq 0, \\ 1/(b^1 + b^4)^2 \cdot B, & \text{pro } \det(B) = 0, b^1 \neq 0 \vee b^4 \neq 0, \\ \mathbf{0}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

A pokračujeme s inverzí matice  $F^H A F$ .

**Věta 4.3** Necht'  $A$  je definována rovnicí (4.12), kde  $S^{p,q} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  jsou takové, že  $D^{p,q}$  jsou reálné a  $D^{2,1} = D^{1,2}$ . Potom  $A^\dagger = F D^\dagger F^H$ , kde

$$D^\dagger := \begin{pmatrix} D^{1,1,\dagger} & D^{1,2,\dagger} \\ D^{1,2,\dagger} & D^{2,2,\dagger} \end{pmatrix}$$

a diagonální matice  $D^{p,q,\dagger} := \text{diag}(D_{k,j}^{p,q,\dagger})$  jsou definovány jako

$$\begin{pmatrix} D_{k,j}^{1,1,\dagger} & D_{k,j}^{1,2,\dagger} \\ D_{k,j}^{1,2,\dagger} & D_{k,j}^{2,2,\dagger} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} D_{k,j}^{1,1} & D_{k,j}^{1,2} \\ D_{k,j}^{1,2} & D_{k,j}^{2,2} \end{pmatrix}^\dagger, \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, n_1, \\ k = 1, \dots, n_2. \end{matrix}$$

Všimneme si, že pro konkrétní volby matice  $S^{p,q}$  se výpočet  $D^\dagger$  značně zjednodušuje. Dostaneme

$$\begin{aligned}
D_{k,j}^{1,1} &= S_{2,2}^{1,1} + 2 \cos(2\pi(j-1)/n_1) S_{1,2}^{1,1} + 2 \cos(2\pi(k-1)/n_2) S_{2,1}^{1,1}, \\
D_{k,j}^{2,2} &= S_{2,2}^{1,1} + 2 \cos(2\pi(k-1)/n_2) S_{1,2}^{1,1} + 2 \cos(2\pi(j-1)/n_1) S_{2,1}^{1,1}, \\
D_{k,j}^{1,2} &= D_{k,j}^{2,1} = -4 S_{1,1}^{1,2} \sin(2\pi(j-1)/n_1) \sin(2\pi(k-1)/n_2).
\end{aligned}$$

Dle věty 4.3 může být řešení lineárního systému získáno výpočtem pseudoinverze blokově diagonální matice  $D$  a použitím několika FFT.

#### 4.7 Výpočet sil

Síly jsou odvozeny od Gâteauxovy derivace použité míry vzdálenosti.

**Věta 4.4** *Necht'  $R$  a  $T \in \text{Img}(2)$ ,  $T \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega := (0, 1)^2$ . Pak Gâteauxova derivace  $\mathcal{D}[R, T; u]$*

$$\mathcal{D}[R, T; u] := \frac{1}{2} \|T_u - R\|_{L_2(\Omega)}^2$$

je dána vzhledem k  $v$  jako

$$d\mathcal{D}[R, T; u; v] = \int_{\mathbb{R}^2} \langle f(x, u(x)), v(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx,$$

kde  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, u(x)) := (R(x) - T_u(x)) \nabla T_u(x).$$

Jelikož jsou  $R$  a  $T$  digitální obrazy, je třeba k výpočtu  $T_u(x)$  pro neceločíselné hodnoty  $u(x)$  použít interpolace (viz. oddíl 2.3).

#### 4.8 Výsledný algoritmus

Použití prostých iterací (4.5) a aproximace Navier-Lamého rovnic pomocí konečných diferencí s periodickými okrajovými podmínkami vyústilo v algoritmus shrnutý v 4.1. V každém kroku tedy vypočteme sílu  $f^{(k)}$  a její FFT, pak pomocí bloků matice  $D^\dagger$  vyřešíme soustavu lineárních rovnic a zpětnou FFT získáme posunutí  $u^{(k+1)}$ . Časově náročnější částí je řešení lineárního systému prováděné v každé iteraci. Využití přímého řešiče představeného v této kapitole nám dává složitost  $\mathcal{O}(N \log N)$  (viz. věta 4.5). Stojí za to poznamenat, že iterační řešení mohou poskytovat atraktivní alternativu, nicméně použitím iteračního řešiče se zavádí další vnitřní iterace a počítá se pouze aproximace řešení lineárního systému.

**Věta 4.5** *Necht'  $F_r \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ , pro  $r = 1, 2$ , je daná pravá strana a  $N = n_1 n_2$ . Numerická složitost pro uvedené řešení diskrétních Navier-Lamého rovnic*

$$A(U_1, U_2)^T = (F_1, F_2)^T$$

s periodickými okrajovými podmínkami je  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

Konečná deformace je dána  $x + u^{(K)}(x)$ , kde  $K$  značí počet provedených iterací. I když tento přístup představuje fyzikálně významný model elastické tkáně, může být omezující, v případě více odlišných obrazů. Proto rozdělíme transformaci do více kroků a pokaždé budeme aktualizaci posunutí  $u^{k+1}$  počítat z  $T_u^k$ , pomocí této myšlenky rozložíme celkovou pružnou deformaci do  $K$  malých kroků, ve kterých je tvarová paměť tělesa z kroku na krok vymazána.

---

**Algoritmus 4.1** Algoritmus řešení.

---

```
 $k = 0, U_1^{(k)} = 0, U_2^{(k)} = 0;$ 
for  $k = 1, 2, \dots, K$  do
  výpočet síly  $F_1^{(k)}, F_2^{(k)};$ 
   $\tilde{F}_1^{(k)} := \text{fft}(F_1^{(k)});$ 
   $\tilde{F}_2^{(k)} := \text{fft}(F_2^{(k)});$ 
  for  $j = 1, \dots, n_1$  do
    for  $l = 1, \dots, n_2$  do
       $\tilde{U}_{1;l,j}^{(k)} = D_{l,j}^{1,1,\dagger} \tilde{F}_{1;l,j}^{(k)} + D_{l,j}^{1,2,\dagger} \tilde{F}_{2;l,j}^{(k)};$ 
       $\tilde{U}_{2;l,j}^{(k)} = D_{l,j}^{2,1,\dagger} \tilde{F}_{1;l,j}^{(k)} + D_{l,j}^{2,2,\dagger} \tilde{F}_{2;l,j}^{(k)};$ 
    end for
  end for
   $U_1^{(k+1)} := \text{fft}^{-1}(\tilde{U}_1)^{(k)};$ 
   $U_2^{(k+1)} := \text{fft}^{-1}(\tilde{U}_2)^{(k)};$ 
end for
```

---

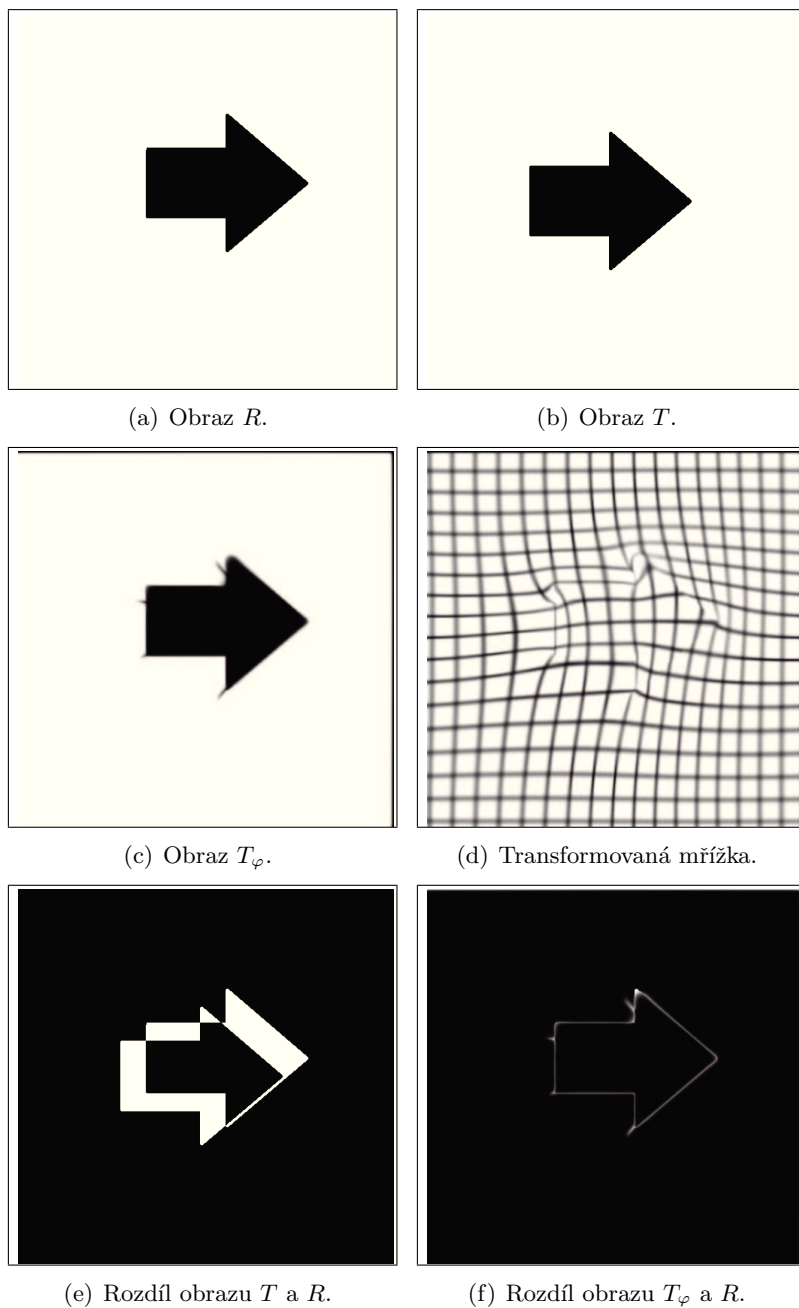
## 4.9 Ukázka elastické registrace

Nyní si na příkladech různých deformací ukážeme výsledky použití implementované elastické registrace. Více k samotné implementaci v kapitole 5. Opět jsou použity stejné obrazy T a R jako u parametrických metod. Zopakujme použité deformace

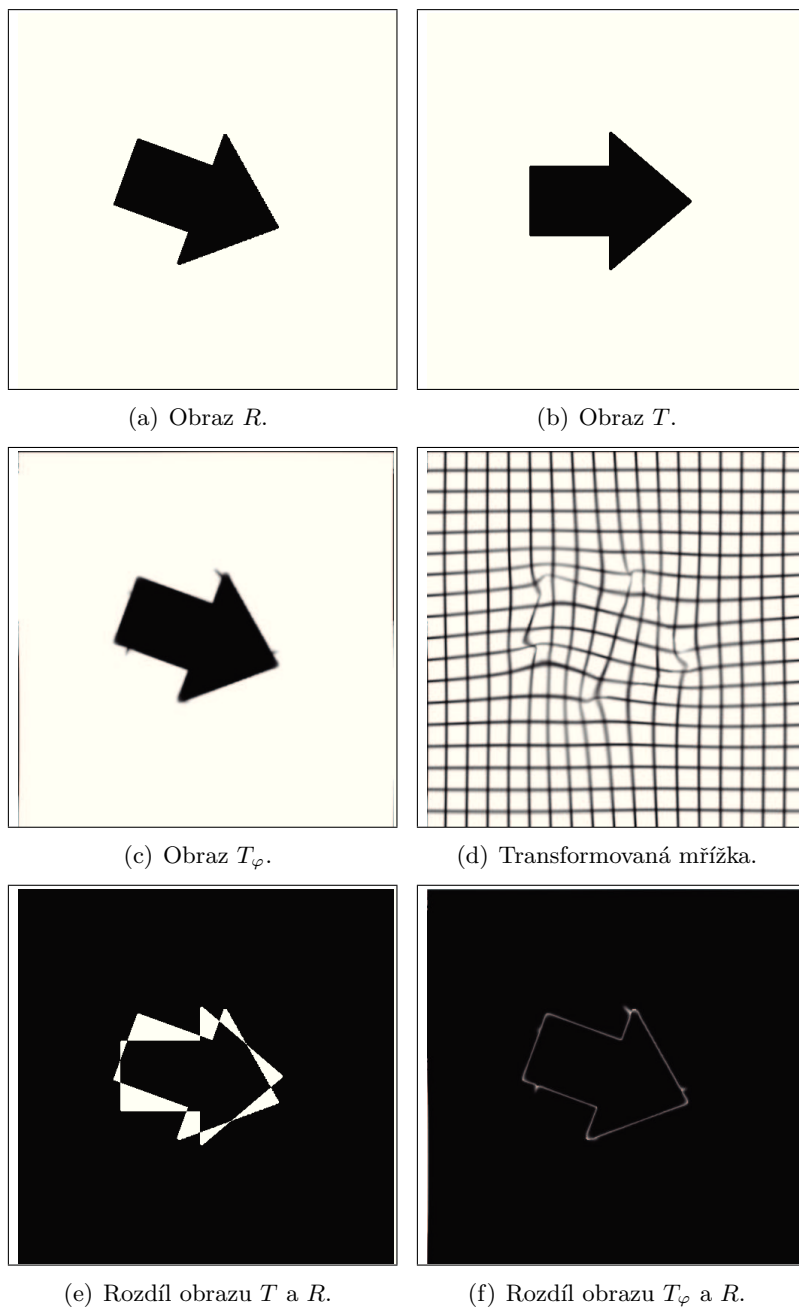
- posun,
- rotace,
- deformace „rybí oko“,
- kombinace všech.

Parametry byly voleny  $\lambda = 500000$  a  $\mu = 0$ , počet kroků byl stanoven na 50. Deformace „rybí oko“ je zde uvedena dvakrát, ale s jinou intenzitou šedi objektu. Jak vidíme na obrázku 4.4 tato změna - zmenšení kontrastu objektu a pozadí - měla značný vliv.

Z výsledků vyplývá, že elastická registrace zvládla na těchto příkladech jak tuhé, tak pružné deformace velmi dobře. Avšak oproti parametrickým metodám je časově náročnější.

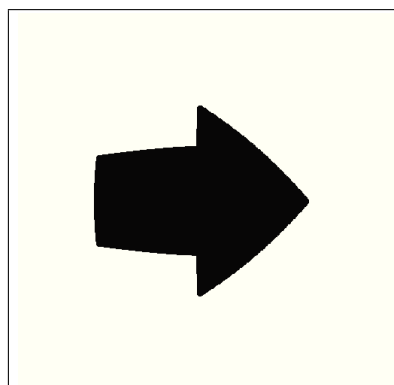


Obrázek 4.1: Elastické registrace - posun.

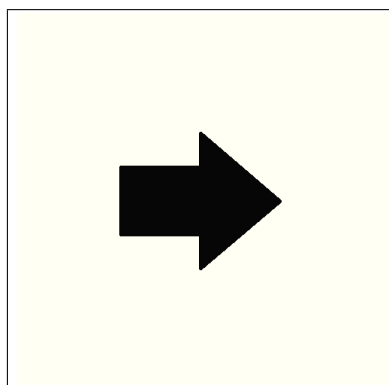


Obrázek 4.2: Elastické registrace - rotace.

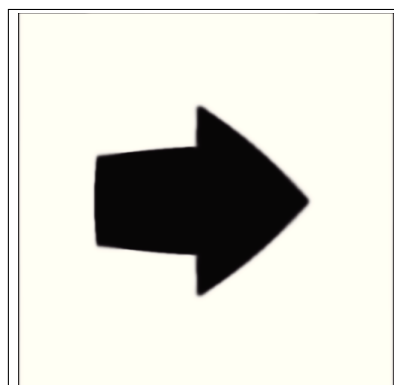




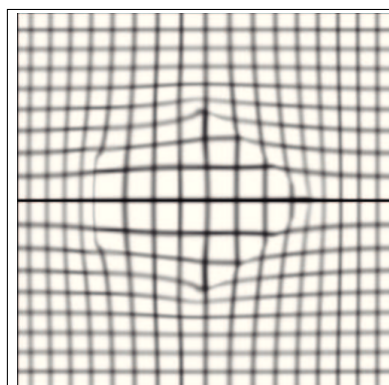
(a) Obraz  $R$ .



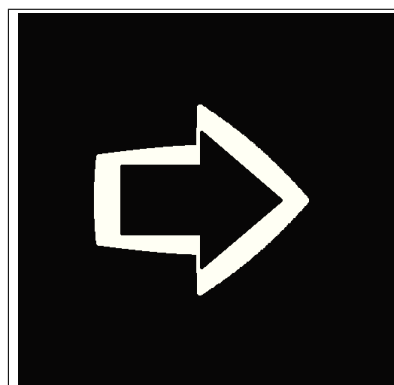
(b) Obraz  $T$ .



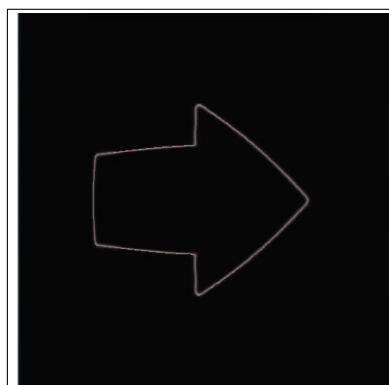
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

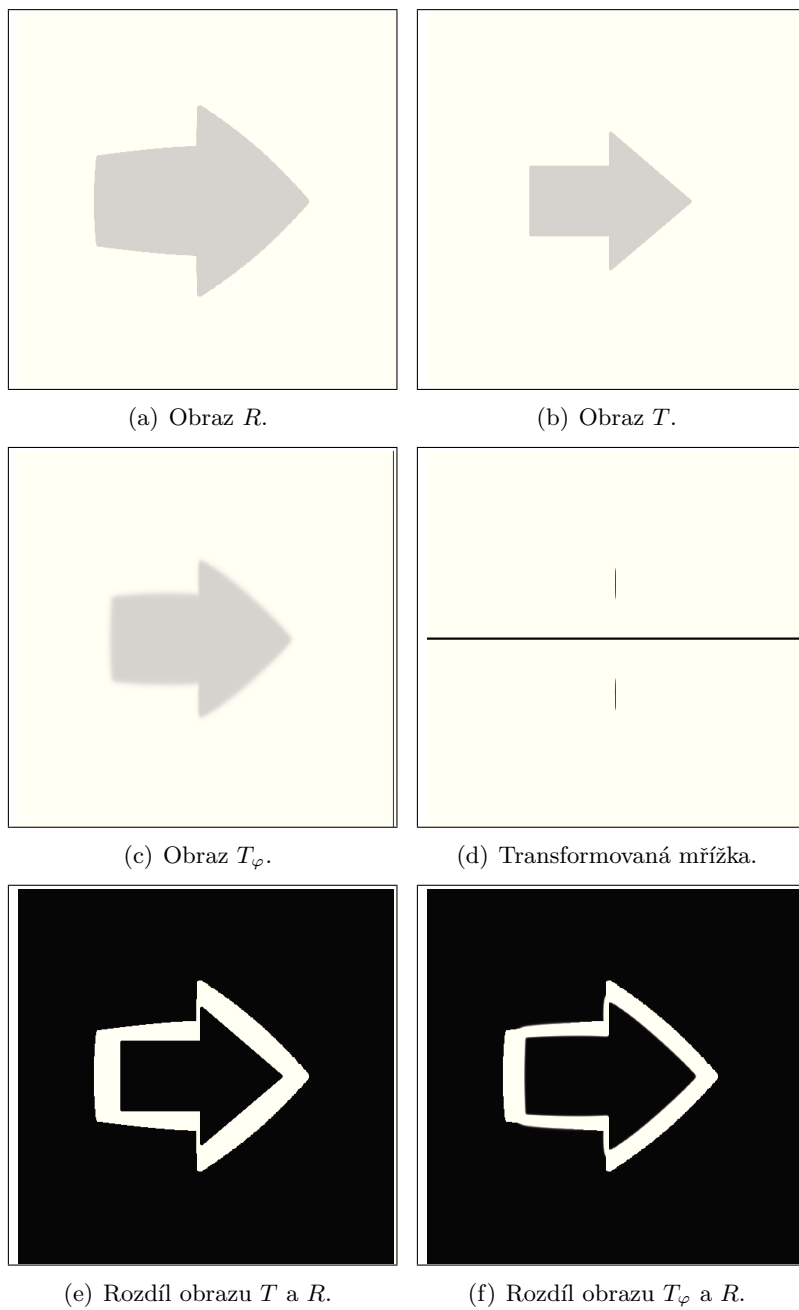


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

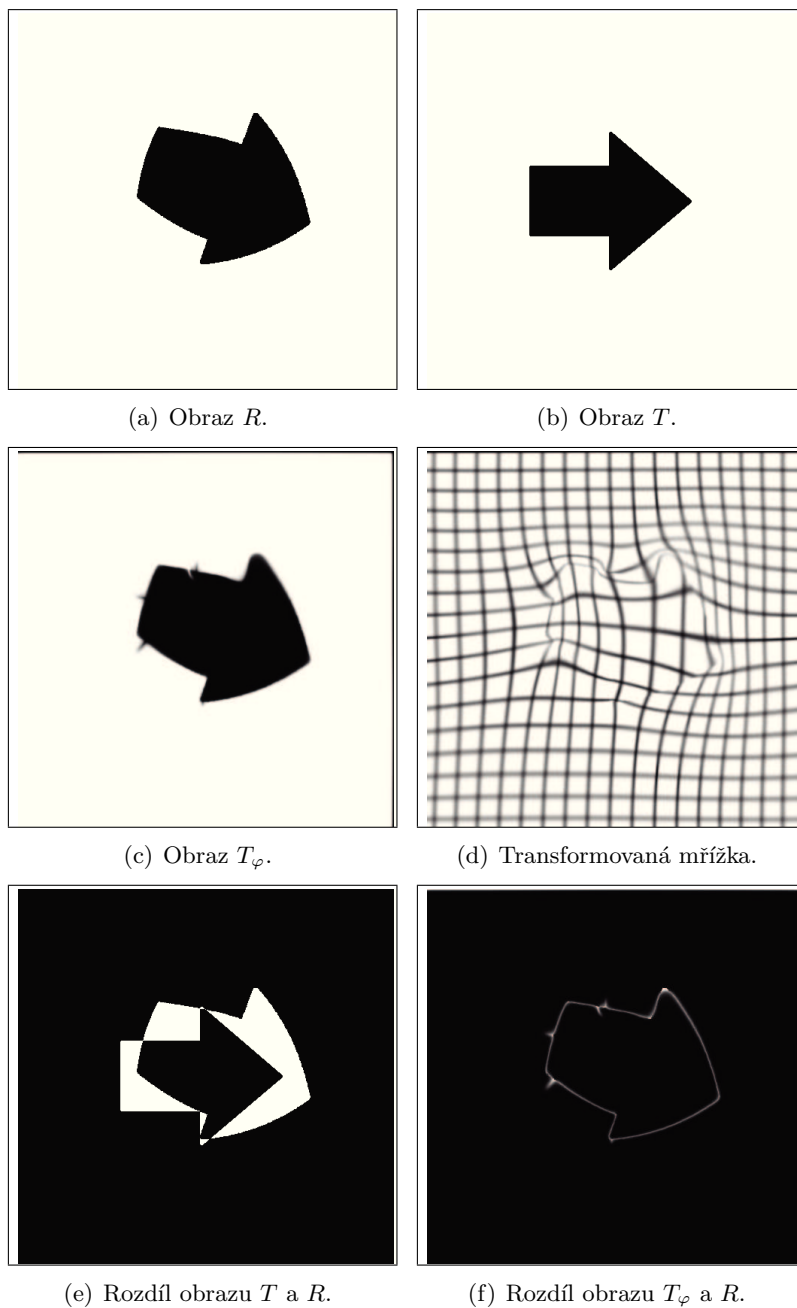


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

Obrázek 4.3: Elastické registrace - „rybí oko“.



Obrázek 4.4: Elastické registrace - „rybí oko“, odlišný kontrast.



Obrázek 4.5: Elastické registrace - kombinace.

## 5 Implementace

Vybrané metody registrace obrazu probrané v předchozích kapitolách byly implementovány v MATLABu (verze R2009b). Toto programové prostředí a skriptovací programovací jazyk je určen pro symbolické a numerické výpočty, analýzu a vizualizaci dat, modelování a simulaci dějů. Jelikož náplní práce není programování v MATLABu, nebudeme se věnovat celé implementaci, zmíníme jen několik důležitých nebo zajímavých faktů, všechny kódy je možné nalézt na přiloženém CD. Stručný přehled obsahu m-filů je následující:

- *axis* - metoda hlavních os,
- *bilinear* - bilineární interpolace,
- *centerCov* - výpočet středu a kovariance obrazu,
- *derivate* - derivace diskrétního obrazu,
- *elastic* - elastická registrace,
- *landmark* - metoda význačných bodů,
- *loadCT* - načtení snímků CT a jejich převedení do formátu .bmp,
- *matrixS* - výpočet matice  $S$ ,
- *optiLinear* - metoda optimální lineární registrace,
- *product* - výpočet  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ ,
- *smoothLandmark* - hladká metoda význačných bodů.

Mezi výhody MATLABu patří bohatá knihovna funkcí (resp. m-filů) obsahující základní matematické funkce jako norma vektoru, suma vektoru, sinus nebo cosinus, dále plnou podporu pro práci s maticemi (od základních operací po spektrální rozklad), konvoluci, i efektivní implementaci FFT důležité při elastické registraci (nebylo tedy třeba použít MatSol).

Také umožňuje jednoduchou práci s obrazy - jejich načtení do matice a po zpracování i zobrazení a uložení do požadovaného formátu. Umožňuje načíst i snímky z FNO, které jsou ve formátu DICOM (zkratka Digital Imaging and Communications in Medicine) s příponou .dcm. Tento formát je v lékařství standardem, neobsahuje pouze samotný obraz, ale i mnoho dalších informací, například informace o pacientovi, typ snímače, oblast vyšetření atd. Více informací o tomto formátu lze nalézt v [7]. Uvedme několik funkcí pro práci s obrazy:

- *dicominfo(filename)* - načte informace z DICOM souboru,
- *imread(filename)* - načte obraz z grafického souboru,
- *dicomread(info)* - načte obraz z metadat získaných funkcí *dicominfo(filename)*,

- *imshow(image)* - zobrazí obraz,
- *print(figure,format,filename)* - uloží zobrazený obraz do požadovaného formátu.
- *imcontrast* - umožní případnou úpravu kontrastu zobrazeného obrazu.

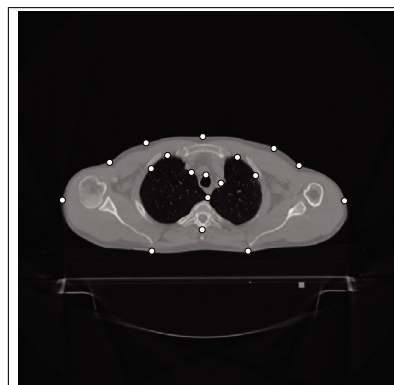
## 6 Experimentální zpracování snímku z FNO

Obsahem této kapitoly je registrace snímků z Fakultní nemocnice Ostrava - Poruba. Snímky zobrazují řezy hrudníku v nádechu a výdechu získané metodou CT. Jako obrazy R byly zvoleny snímky v nádechu a jako obrazy T snímky ve výdechu. Význačné body byly vybrány ručně a byly voleny tak, aby pokud možno zachytily změny (i nulové) celkového obrysu i změny objemu samotných plic. Parametry elastické registrace  $\lambda$  a  $\mu$  byly voleny stejně jako v akademických příkladech.

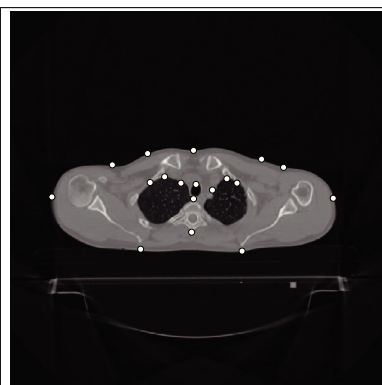
Hodnocení výsledků jednotlivých metod je v těchto praktických příkladech obtížnější, protože vyžaduje odborné znalosti. Na jejich základě lze posoudit, zda při registraci byly zachovány vlastnosti tkání (například tuhost kostí), zda nedošlo k změnám v místech, ve kterých nemělo, a podobně.

Pokud posoudíme výsledky na základě celkového rozdílu obrazů a bez jakýchkoli dalších nároků vyplývajících z potřeb lékařství, pak metody dosáhli následujících výsledků:

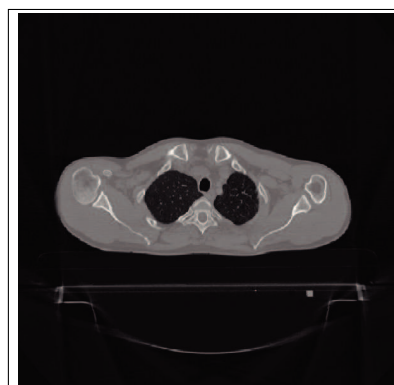
- Význačné body - výsledný rozdíl  $T_\varphi$  a  $R$  je stále významný, došlo i k většímu posunutí kostí.
- Hladké význačné body - pro  $\alpha = 10^4$  jsou výsledky podobné s nehladkou metodou (drobný rozdíl mezi oběma transformacemi je vidět u deformované mřížky), pro  $\alpha = 0$  nejsou výsledky také uspokojivé.
- Hlavní osy - opět výsledky jsou velice podobné metodě význačných bodů.
- Optimální lineární registrace - i pro tuto metodu jsou výsledky velice podobné metodě význačných bodů, ale metoda byla po 200 cyklech zastavena z důvodu časové náročnosti.
- Elastická registrace - dosáhla nejlepších výsledků.



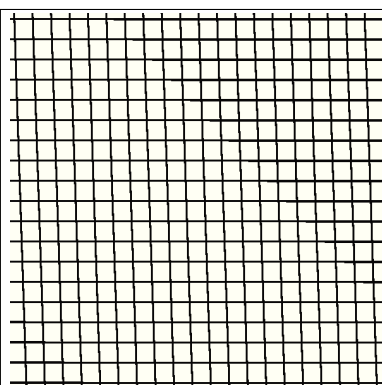
(a) Obraz  $R$ .



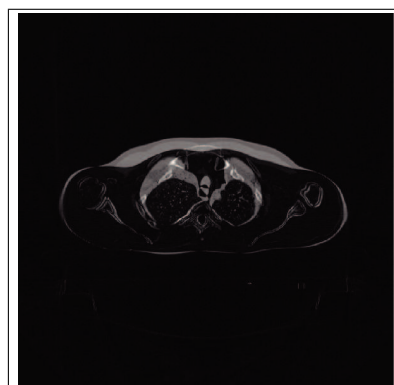
(b) Obraz  $T$ .



(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

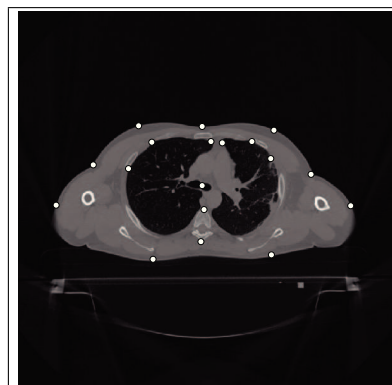


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

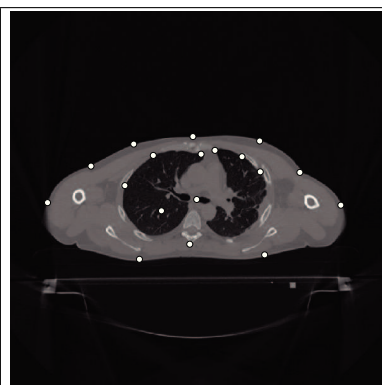


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

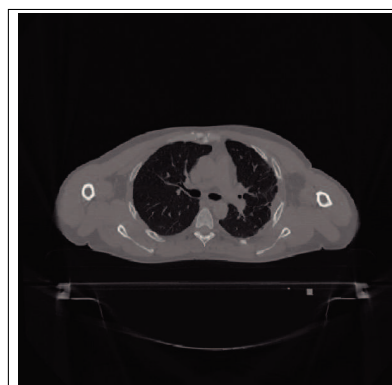
Obrázek 6.1: Význačné body - první řez hrudníku.



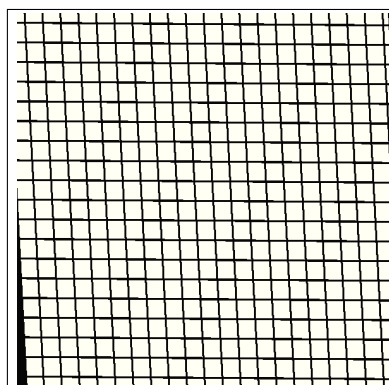
(a) Obraz  $R$ .



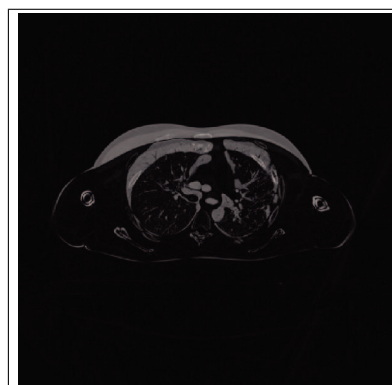
(b) Obraz  $T$ .



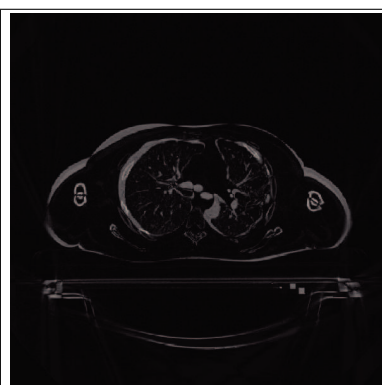
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.



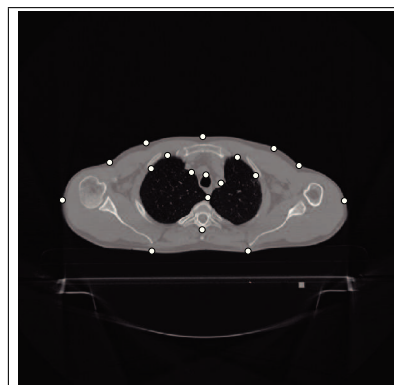
(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .



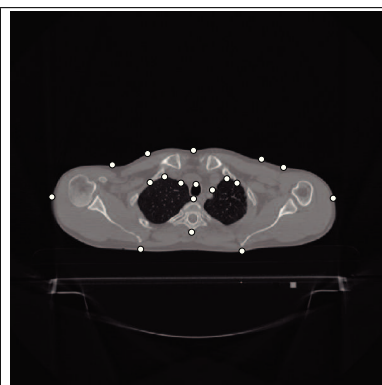
(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

Obrázek 6.2: Význačné body - druhý řez hrudníku.





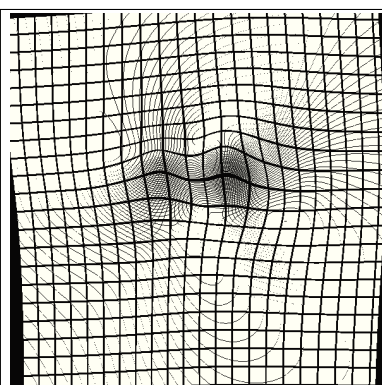
(a) Obraz  $R$ .



(b) Obraz  $T$ .



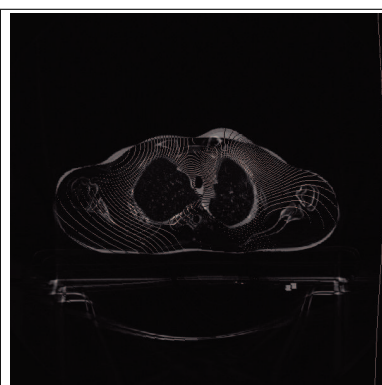
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

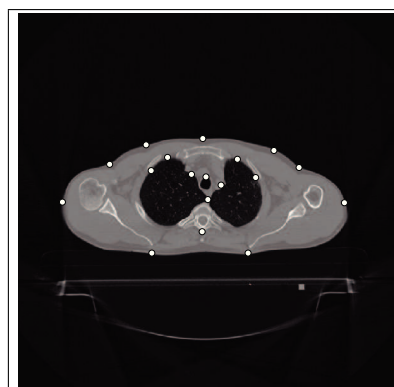


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

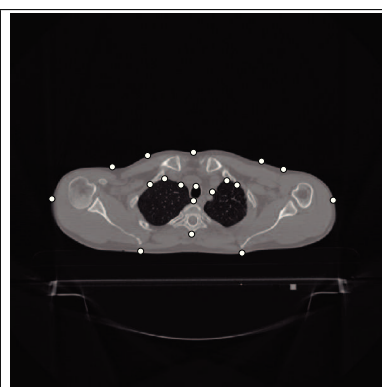


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

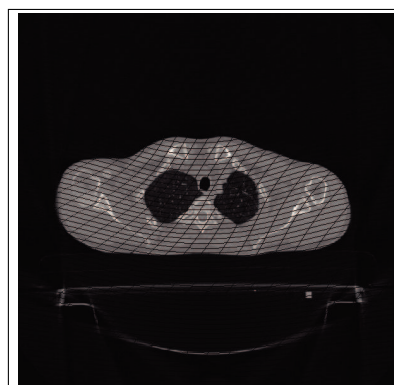
Obrázek 6.3: Hladké význačné body - první řez hrudníku,  $\alpha = 0$ .



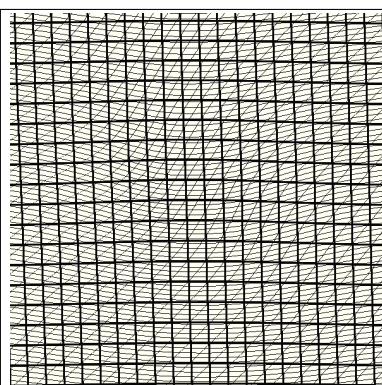
(a) Obraz  $R$ .



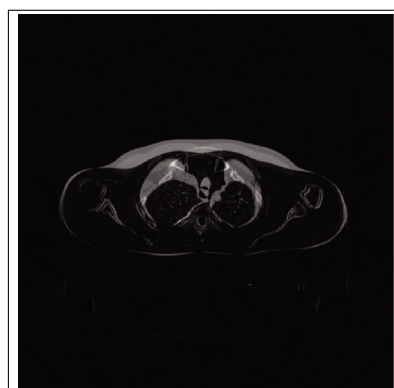
(b) Obraz  $T$ .



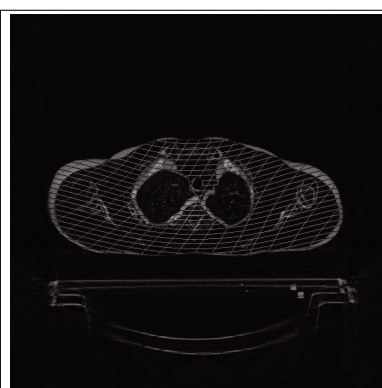
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

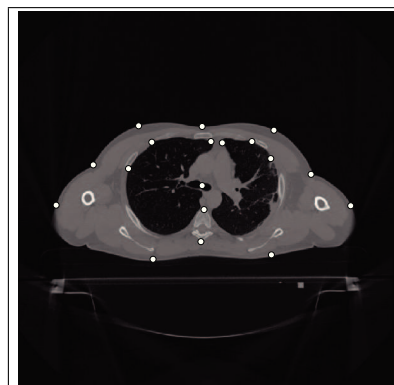


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

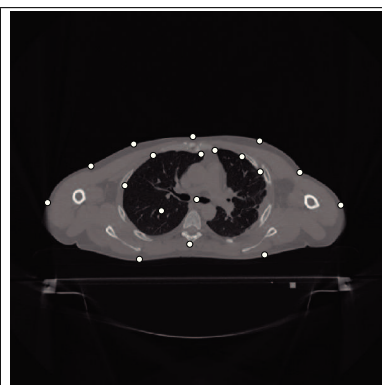


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

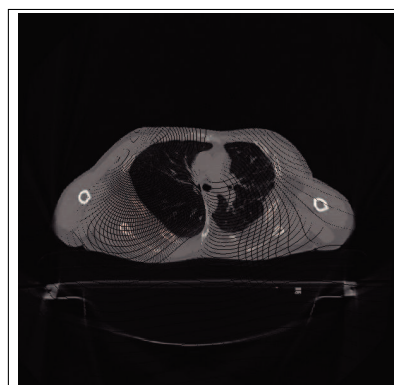
Obrázek 6.4: Hladké význačné body - první řez hrudníku,  $\alpha = 10^4$ .



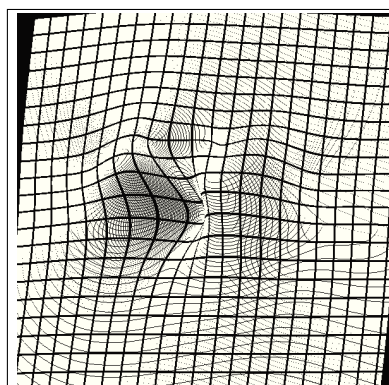
(a) Obraz  $R$ .



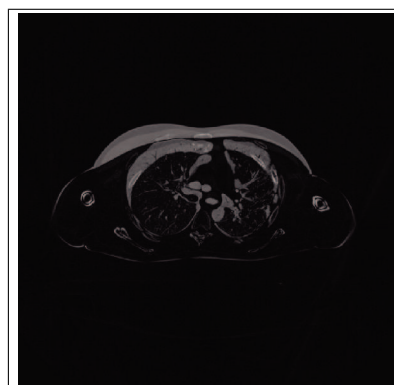
(b) Obraz  $T$ .



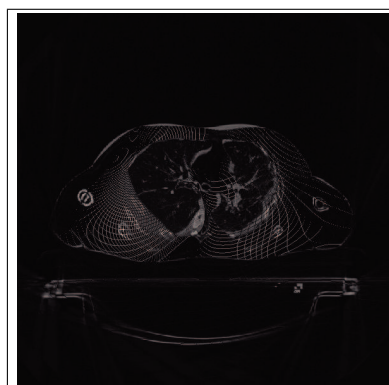
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

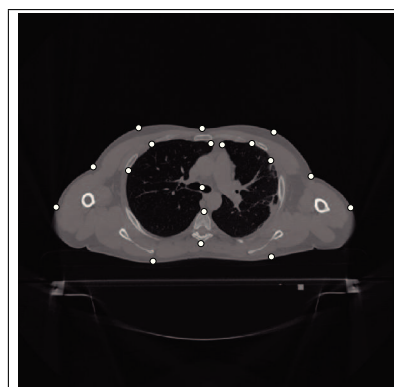


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

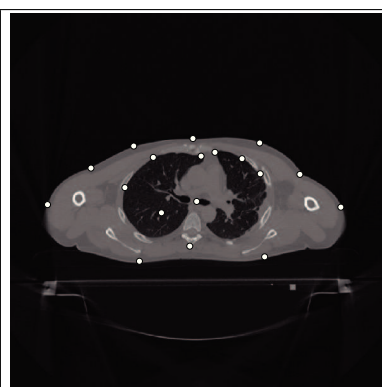


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

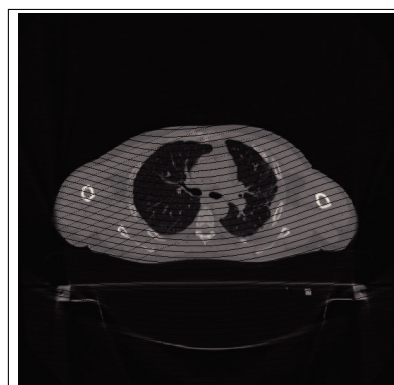
Obrázek 6.5: Hladké význačné body - druhý řez hrudníku,  $\alpha = 0$ .



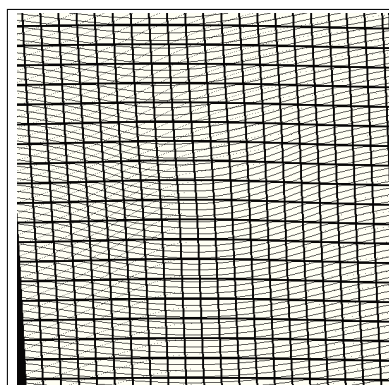
(a) Obraz  $R$ .



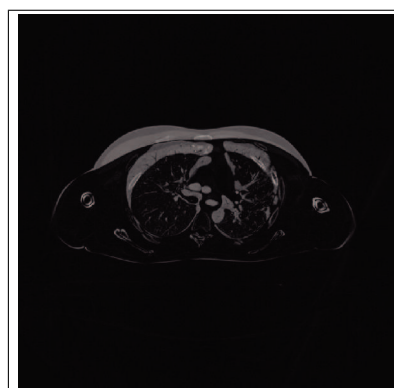
(b) Obraz  $T$ .



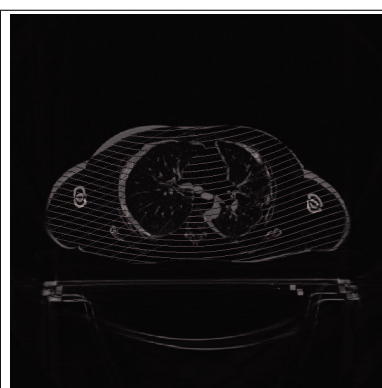
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

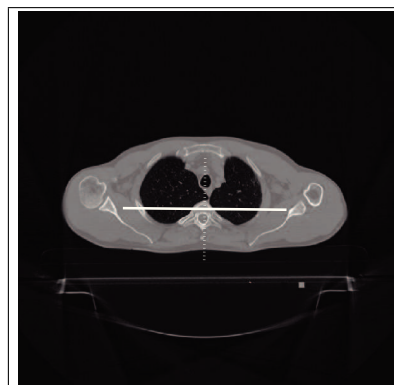


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

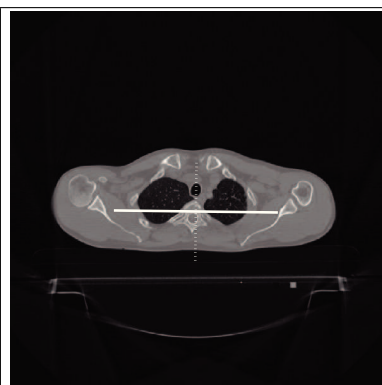


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

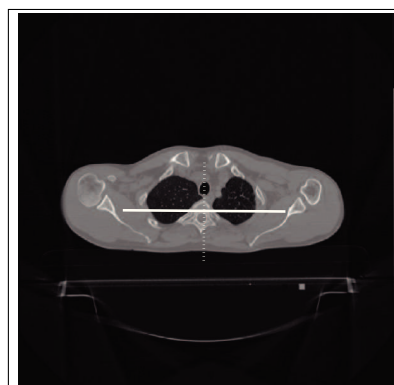
Obrázek 6.6: Hladké význačné body - druhý řez hrudníku,  $\alpha = 10^4$ .



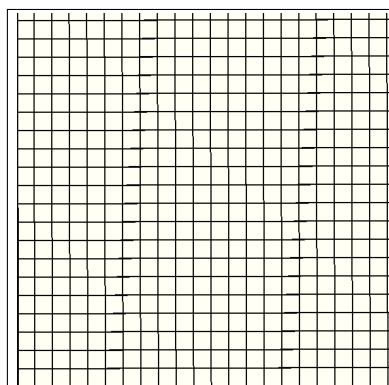
(a) Obraz  $R$ .



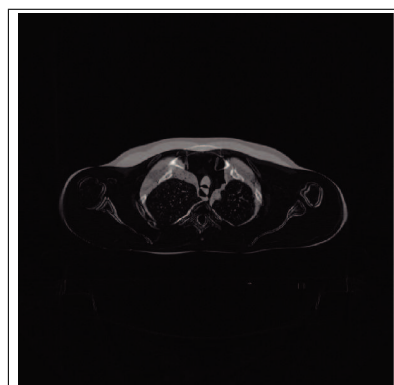
(b) Obraz  $T$ .



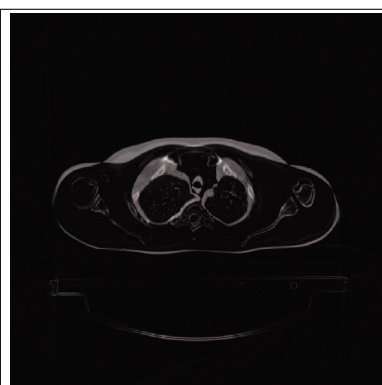
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

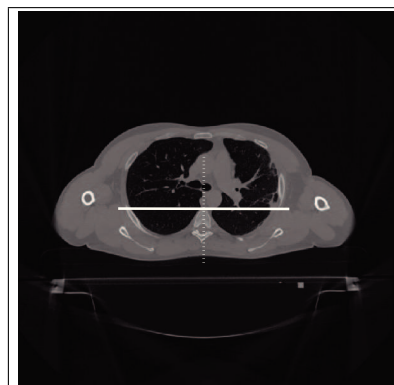


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

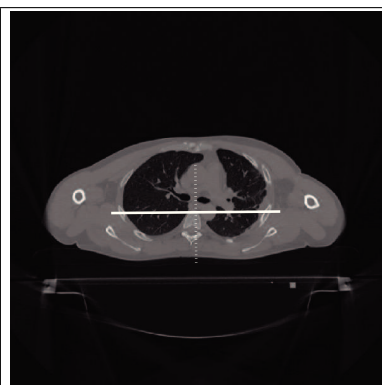


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

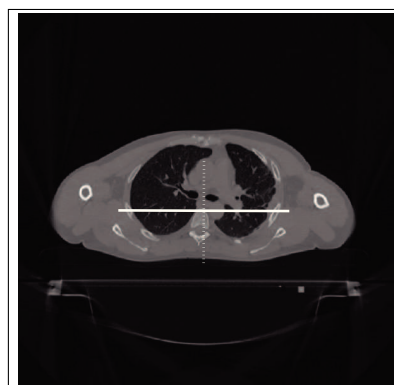
Obrázek 6.7: Hlavní osy - první řez hrudníku.



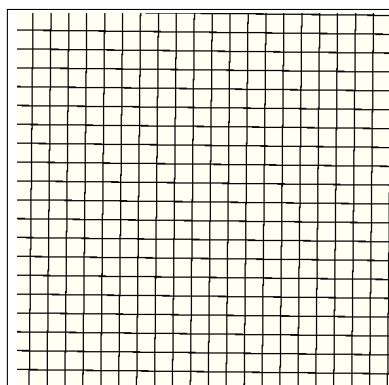
(a) Obraz  $R$ .



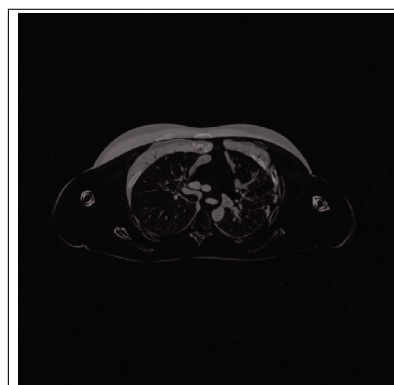
(b) Obraz  $T$ .



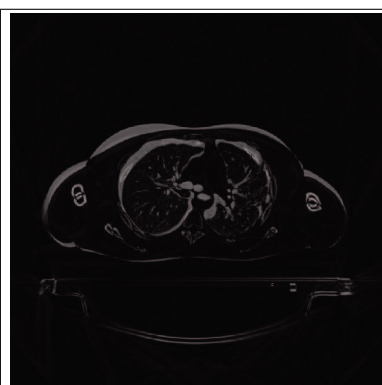
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.



(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .



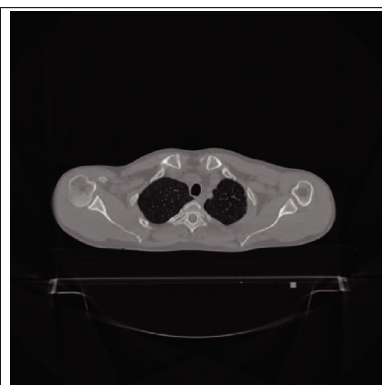
(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

Obrázek 6.8: Hlavní osy - druhý řez hrudníku.

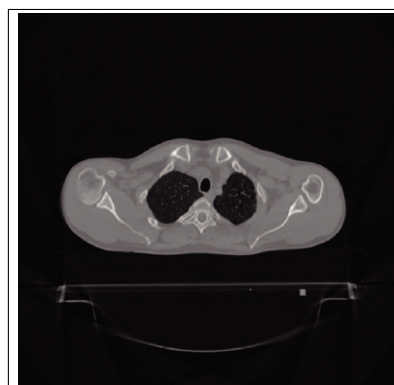




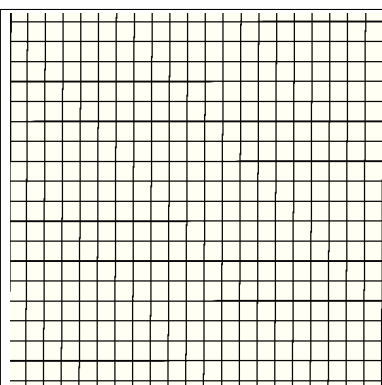
(a) Obraz  $R$ .



(b) Obraz  $T$ .



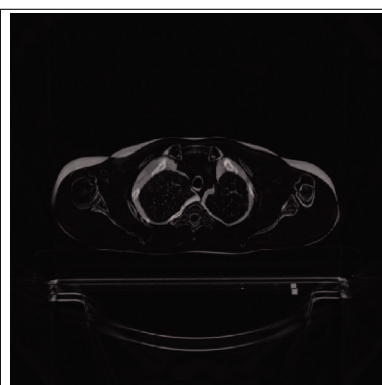
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

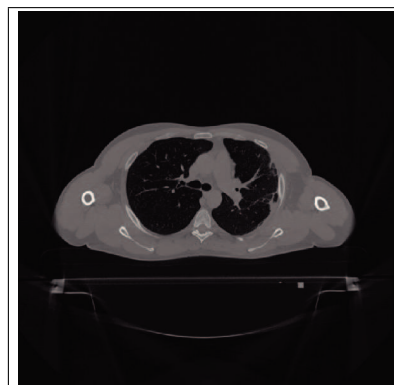


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

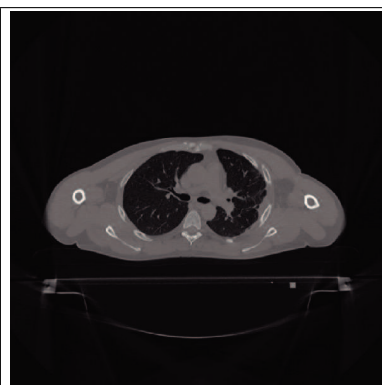


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

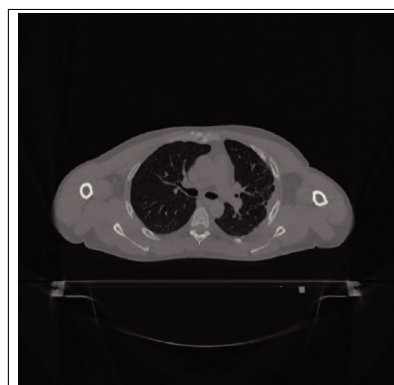
Obrázek 6.9: Optimální lineární registrace - první řez hrudníku.



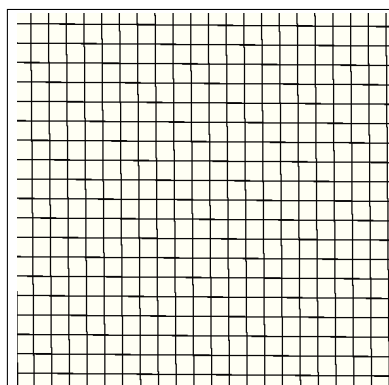
(a) Obraz  $R$ .



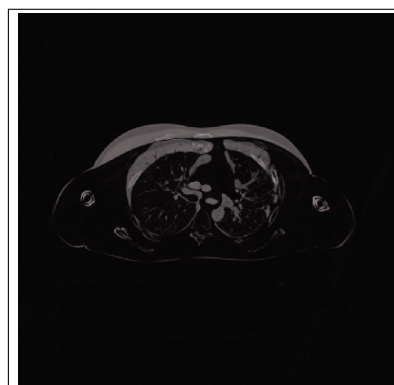
(b) Obraz  $T$ .



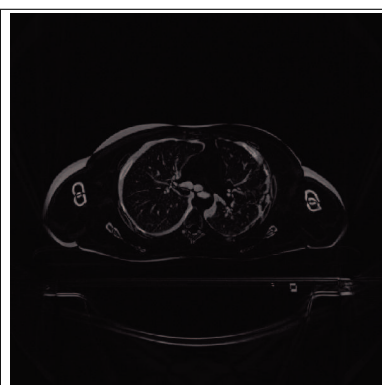
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.



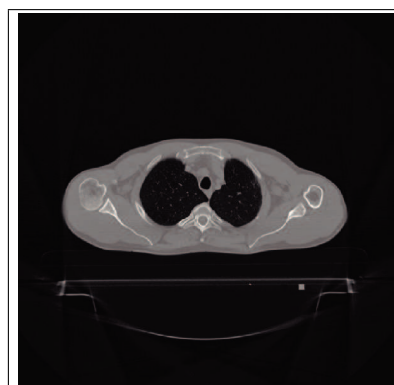
(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .



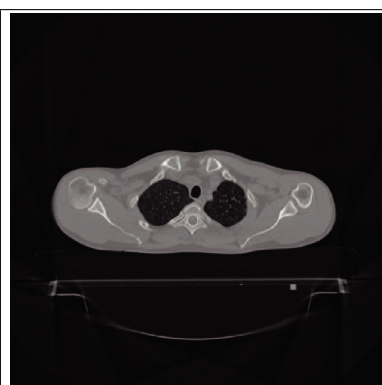
(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

Obrázek 6.10: Optimální lineární registrace - druhý řez hrudníku.

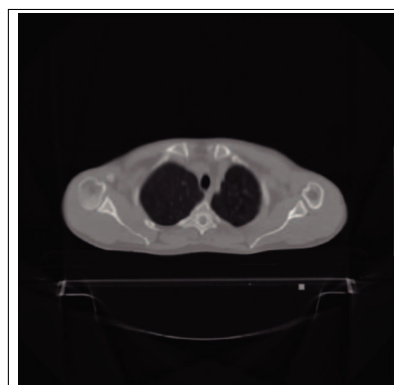




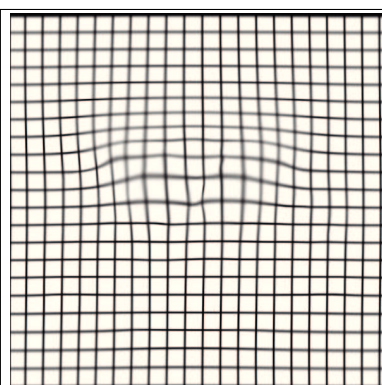
(a) Obraz  $R$ .



(b) Obraz  $T$ .



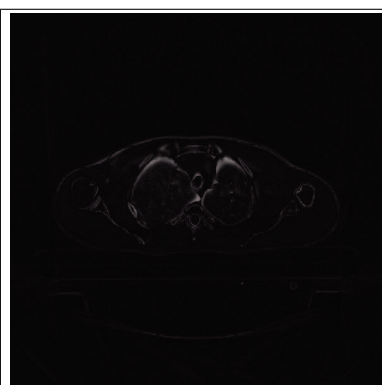
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.

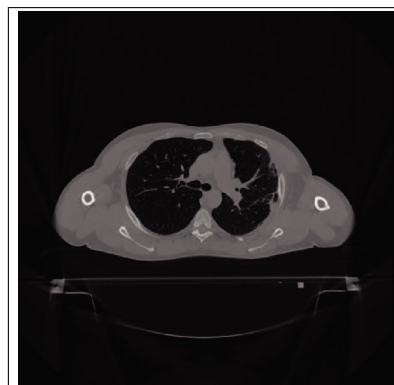


(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .

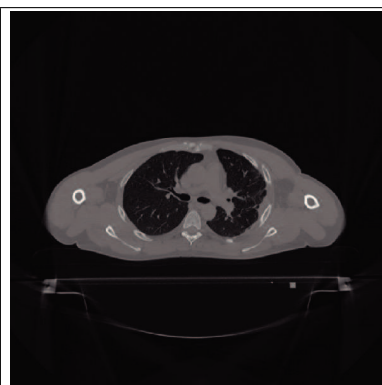


(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

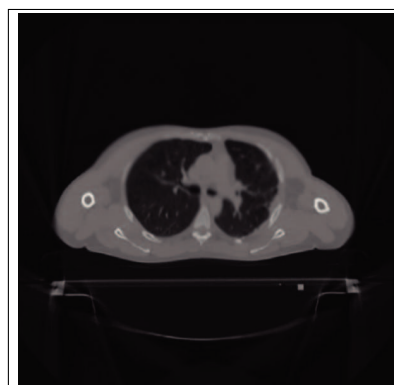
Obrázek 6.11: Elastická registrace - první řez hrudníku.



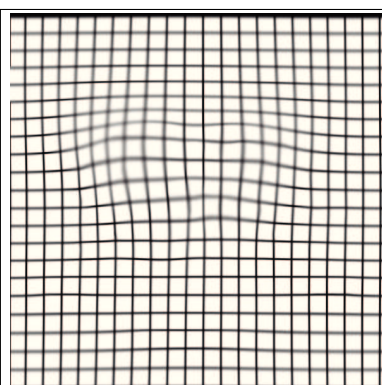
(a) Obraz  $R$ .



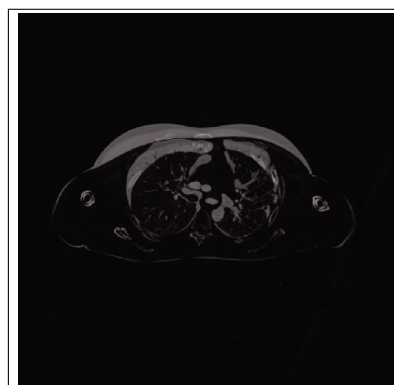
(b) Obraz  $T$ .



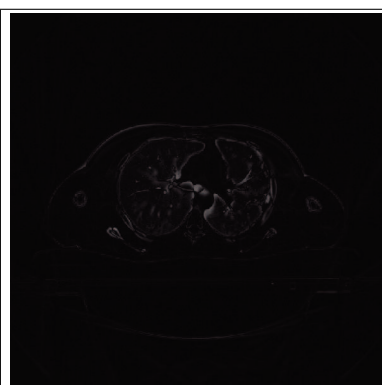
(c) Obraz  $T_\varphi$ .



(d) Transformovaná mřížka.



(e) Rozdíl obrazu  $T$  a  $R$ .



(f) Rozdíl obrazu  $T_\varphi$  a  $R$ .

Obrázek 6.12: Elastická registrace - druhý řez hrudníku.

## 7 Závěr

Cílem této práce bylo uvést přehled metod registrace obrazu používaných v lékařství a na tomto základě dané metody implementovat. Pomocí implementace pak byly jednotlivé metody porovnány na akademických příkladech (obrazy s šipkou) a také na praktických příkladech snímků řezu hrudníku poskytnutých FNO.

Popsány byly parametrické metody, zastoupené metodou význačných bodů, hladkou metodou význačných bodů, metodou hlavních os a metodou optimální lineární registrace. V další kapitole byla podrobně uvedena metoda elastické registrace, která patří mezi registrace neparametrické. Zběžně jsme se seznámili i s implementací, hlavně pak s prací s obrazy v MATLABu. Nakonec jsme si ukázali i výsledky implementovaných metod na snímcích řezu hrudníku.

Metoda význačných bodů je jednoduchá a rychlá, ale vyžaduje význačné body, jejichž určení může být obtížné. Vhodná je hlavně na tuhé deformace. Hladká metoda význačných bodů měla pro parametr  $\alpha = 10^4$  obdobné výsledky jako její nehladká varianta, pro parametr  $\alpha = 0$  vykazuje o něco lepší výsledky pro pružnou deformaci.

Metoda hlavních os je také jednoduchá a rychlá a ani nevyžaduje význačné body. Její nevýhodou je však závislost na intenzitě obrazu, viz. obrázek 3.13, navíc i různé obrazy mohou mít stejné stochastické vlastnosti v závislosti na výběru matice  $M$ , viz. příklad v [2]. Výsledky také ukazují hlavně využití při tuhých deformacích.

Optimální lineární registrace si také lépe poradila s tuhými deformacemi, její značnou nevýhodou je časová náročnost. Metoda elastické registrace měla nejlepší výsledky, avšak je časově náročnější a je závislá na volbě parametru  $\lambda$  a  $\mu$ .

Rozhodnout, která metoda je obecně lepší, nelze. V praktických případech je třeba využít dostupných informací o předpokládaných deformacích a zvážit výhody a nevýhody konkrétní aplikace jednotlivých metod. I když měla elastická registrace v použitých příkladech nejlepší výsledky, nemusí být vždy nejvhodnějším řešením. Například u detekce změn předpokládáme pouze tuhé deformace (posunutí, rotace a změna měřítko) a lokální deformace považujeme za hledané změny.

Hlavním přínosem práce je porovnání uvažovaných technik na základě vlastní implementace a na zkušebních obrazech, ale i na snímcích poskytnutých FNO. Pokračováním této práce by mělo být nejen zlepšení již implementovaných metod (například paralizace, implementace pro 3D) a implementace dalších, ale i užší propojení s praxí a spolupráce se samotnými lékaři (například spolupráce se zmiňovanou FNO). Tím by došlo k zapojením odborných lékařských znalostí a registrace obrazu by mohla být optimalizována pro konkrétní praktické aplikace.

## 8 Literatura

- [1] *Wikipedia* : [online]. poslední aktualizace 20.3.2011 [cit. 2011-04-22]. Image registration. Dostupné z WWW: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Image\\_registration](http://en.wikipedia.org/wiki/Image_registration)>
- [2] MODERSITZKI, Jan. *Numerical Methods for Image Registration*. Oxford : Oxford University Press, 2004. 196 s.
- [3] ZITOVÁ , Barbara ; FLUSSER, Jan . *Image registration methods: a survey*. Image and Vision Computing [online]. 2003, 21, [cit. 2011-04-22]. Dostupný z WWW: <<http://library.utia.cas.cz/prace/20030125.pdf>>.
- [4] FISCHER , Bernd ; MODERSITZKI, Jan . Ill-posed medicine - an introduction to image registration . *Inverse Problems* [online]. 2008, 24, [cit. 2011-04-22]. Dostupný z WWW: <<http://iopscience.iop.org/0266-5611/24/3/034008>>.
- [5] FISCHER, Bernd; MODERSITZKI, Jan. *Fast image registration - a variational approach*. In NACoM-2003 Extended Abstracts [online]. Cambridge : Wiley, 2003 [cit. 2011-04-25]. Dostupný z WWW: <<http://www.wiley-vch.de/vch/journals/2135/NACoM-2003.pdf>>.
- [6] BRDIČKA, Miroslav; SAMEK, Ladislav; SOPKO, Bruno. *Mechanika kontinua*. 3., revidované vydání. Praha : Academia, 2005. 799 s.
- [7] *Wikipedia* : [online]. poslední aktualizace 7.4.2011 [cit. 2011-04-22]. DICOM. Dostupné z WWW: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Digital\\_Imaging\\_and\\_Communications\\_in\\_Medicine](http://en.wikipedia.org/wiki/Digital_Imaging_and_Communications_in_Medicine)>